

EINE ERWEITERUNG DER
STATISTISCHEN LINEARISIERUNG
VON NICHTLINEAREN SYSTEMEN
OHNE GEDÄCHTNIS

von
Hartmut Johne

Erlangen 1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINE ERWEITERUNG DER STATISTISCHEN LINEARISIERUNG VON NICHTLINEAREN SYSTEMEN OHNE GEDÄCHTNIS

Dem Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur

vorgelegt von
Hartmut Johne

Erlangen 1977

Als Dissertation genehmigt vom
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 26.5.1977

Tag der Promotion: 4.8.1977

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. H. J. Schneider

Berichterstatter: Prof. Dr. phil. nat. H. Schlitt

Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
1 Einleitung	1
2 Beschreibungsmöglichkeiten von Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen	5
2.1 Zur Definition von Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen	5
2.2 Kenngrößen von Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen	7
2.3 Die GRAM-CHARLIER-Reihe der Verteilungsdichte	14
2.4 Ein Beispiel für die Näherungsdarstellung von $p_x(u)$	18
3 Zur Reihenentwicklung von Verbundverteilungsdichten	22
3.1 Herleitung und Eigenschaften einer Entwicklung mit orthogonalen Funktionen	22
3.2 Berechnung zweidimensionaler Erwartungswerte	27
3.3 Zur Konstruktion der orthonormalen Polynome.....	30
4 Die Approximation im quadratischen Mittel von Zufallsvariablen	36
4.1 Die Problemstellung für statistisch abhängige Zufallsvariable	36
4.2 Die "absolut beste Approximation"	37
4.3 Das Orthogonalitätsprinzip und eine damit abgeleitete Approximation für y	39
4.4 Genäherte Bestimmung der absolut besten Approximation	42
5 Die statistische Approximation von Nichtlinearitäten der Form $y=f(x)$	45

	Seite
5.1	Zur Bestimmung nichtlinearer Ersatzsysteme 45
5.2	Ein Spezialfall: Die äquivalente Verstärkung 48
5.3	Das nichtlineare Ersatzsystem bei GAUSSscher Eingangsverteilung 52
5.4	Eine statistische Begründung der harmonischen Analyse 53
5.5	Eine Meßanordnung 55
6	Nichtlineare Ersatzsysteme bei GAUSSscher Eingangs- verteilung 57
6.1	Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten 57
6.2	Die Approximation bei Potenzkennlinien 60
6.3	Stückweise lineare Kennlinien 65
7	Ersatzsysteme bei GRAM-CHARLIER-NÄHERUNG der Eingangs- dichte 82
7.1	Die Kennlinienapproximation erster Ordnung 82
7.2	Berücksichtigung des dritten Orthonormalpolynoms 86
8	Aussagen über Korrelationsfunktionen und Leistungsspektren 90
8.1	Vergleich der Korrelationsfunktionen von Nichtlinearität und Ersatzsystem 90
8.2	Orthogonalitätsaussagen und separable Prozesse 94
8.3	Eine Invarianzeigenschaft des optimalen Ersatzsystems 97
8.4	Eine Fehlerabschätzung bei linearer Filterung 100
9	Die Behandlung von geschlossenen Regelkreisen mit der FOKKER-PLANCK-METHODE 102
9.1	Zur Beschreibung von stochastisch erregten dynamischen Systemen 102

9.2	Zur Anwendbarkeit der FOKKER-PLANCK-GLEICHUNG bei Regelkreisen	105
9.3	Die Bestimmung der Verteilungsdichte bei zwei Regelkreisen	107
9.3.1	P-T ₁ -System als Linearteil des Folgekreises	107
9.3.2	I-T ₁ -System als Linearteil des Folgekreises	110
9.4	Bestimmung einer Streuungskennlinie für den nichtlinearen Kreis mit P-T ₁ -Glieder	113
9.5	Die Varianz des Folgefehlers für den linearisierten Kreis mit exakter Verteilungsdichte	119
10	Zur Anwendung nichtlinearer Ersatzsysteme im geschlossenen Regelkreis	123
10.1	Grundsätzliche Überlegungen zur Anwendung von Ersatzsystemen im Regelkreis	124
10.2	Die GAUSSsche Annahme im nichtlinearen Ersatzkreis	126
11	Ein Ansatz zur genäherten Behandlung von Regelkreisen mit einer kubischen Nichtlinearität	130
11.1	Die Grundgleichung für $S_{\varepsilon \varepsilon^3}(\omega)$	132
11.1.1	Mehrdimensionale statistische Kennfunktionen	132
11.1.2	Die allgemeine Regelkreisgleichung für $S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$	134
11.2	Der Lösungsansatz mit Kumulantenfunktionen	138
12	Ein quasi-lineares Näherungsverfahren bei nicht-GAUSSscher Dichte des Folgefehlers	142
12.1	Regelkreis mit kubischer Nichtlinearität	142
12.2	Die Erweiterung auf beliebige gedächtnislose Nichtlinearitäten	145
12.3	Ein Beispiel	150

	Seite
12.4 Gegenüberstellung der verschiedenen Methoden	155
Zusammenfassung	157
Literaturverzeichnis	160

1 EINLEITUNG

Die Beschreibung und der Entwurf von Regelungssystemen, auf die stochastische Eingangssignale wirken, gestaltet sich verhältnismäßig einfach, so lange man sich auf lineare Systeme sowie Eingangssignale mit einer GAUSSschen Amplitudenverteilung beschränkt. Daß die dafür notwendige Theorie als weitgehend abgeschlossen gelten kann, hat zwei wesentliche Ursachen. Zum einen können GAUSSsche Prozesse durch eine einzige Kenngröße, die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung, eindeutig gekennzeichnet werden, zum anderen wird der GAUSSsche Charakter der Amplitudenverteilung durch eine lineare Signalverformung nicht verändert. Die statistischen Eigenschaften sämtlicher im Regelkreis auftretender Signale können daher auf der Grundlage der sog. Korrelationsrechnung berechnet werden, wenn die Korrelationsfunktionen der Eingangsgeräusche und die Systemeigenschaften bekannt sind. Umgekehrt können beeinflussbare Systemabschnitte optimal ausgelegt werden, so daß beispielsweise der Leistungsinhalt der Regelabweichung im Störfall minimal wird.

Können nichtlineare Effekte, die bei realen Systemen immer vorhanden sind, bei der Modellbildung nicht mehr vernachlässigt werden, so ist die exakte Beschreibung der jetzt nichtlinearen Regelkreise in Anwesenheit von stochastischen Führungs- oder Störgrößen nur noch in wenigen Fällen möglich. Der Grund ist darin zu sehen, daß nichtlineare Systeme den Charakter der Amplitudenverteilung des stochastischen Eingangssignals bei der Signalverformung verändern. In Verbindung mit dieser Aussage ist die bei dynamischen Systemen zu findende Gedächtniseigenschaft zu sehen. Diese bewirkt, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Amplitudenverhalten des Ausgangssignals zu einem festen Zeitpunkt t_0 im allgemeinen die Kenntnis der gesamten Vergangenheit des stochastischen Eingangssignals erfordern. Ausnahmen sind bei linearen dynamischen Systemen dann gegeben, wenn das Eingangsgeräusch Musterfunktion eines GAUSS-Prozesses oder eines MARKOV-Prozesses ist. Infolge der nichtlinearen Verformung im geschlossenen Kreis sind aber bis auf das Eingangssignal sämtliche im Regelkreis auftretende Signale sicher nicht mehr GAUSSverteilt. Bereits für die Bestimmung einfachster Kenngrößen, beispielsweise der Leistung eines Signals, müssen daher Verbundwahrschein-

lichkeiten beliebig hoher Ordnung bekannt sein, die die Signalvergangenheit beschreiben. Eine Lösung auf der Basis der Korrelationsrechnung ist folglich ausgeschlossen. Unter bestimmten stark einschränkenden Voraussetzungen besitzen Signale im Regelkreis dagegen die MARKOV-Eigenschaft. Die hierauf aufbauende "direkte Lösungsmethode" führt auf eine partielle Differentialgleichung für Verteilungsdichtefunktionen, für die bisher nur in sehr einfachen Fällen Lösungen gefunden worden sind.

Diese kurzen und keineswegs vollständigen Ausführungen zeigen die bei nichtlinearen Regelkreisen mit stochastischen Eingangssignalen auftretenden Schwierigkeiten auf. Sie unterstreichen aber auch die Bedeutung der statistischen Linearisierung, die eine genäherte Beschreibung des nichtlinearen Kreises auf der Basis der Korrelationsrechnung ermöglicht. Bei dieser Näherungsmethode wird der nichtlineare Systemanteil des Kreises isoliert betrachtet und durch ein bezüglich der Wirkung auf das Eingangssignal möglichst gleichwertiges lineares System ersetzt. Je nach gewähltem Kriterium ergeben sich dabei unterschiedliche Ersatzsysteme. Da diese grundsätzlich auch von den statistischen Eigenschaften des Eingangssignals abhängen, wird bisweilen von quasi-linearen Methoden bzw. Ersatzsystemen gesprochen. Häufiger anzufinden ist die synonyme Bezeichnung "lineares Ersatzsystem", die darauf beruht, daß das Ausgangssignal aus dem Eingangssignal durch lineare Operationen entsteht.

Unter den verschiedenen Möglichkeiten zur Bestimmung eines linearen Ersatzsystems hat die älteste von R. BOOTON * im Jahr 1952 erstmals vorgeschlagene Methode die größte Bedeutung erlangt. Für speicherfreie Nichtlinearitäten, die durch eine eindeutige ungerade Kennlinie beschrieben werden, sowie mittelwertfreie, stationäre Eingangssignale schlägt BOOTON eine additive Aufspaltung des Ausgangssignals in zwei Anteile vor:

$$y(t) = f[x(t)] = K x(t) + v(t),$$

d.h. in einen dem Eingangssignal proportionalen Anteil und in den sog. Verzerrungsanteil. Das lineare Ersatzsystem wird dann durch

$$y_L(t) = K x(t)$$

beschrieben, wo die "äquivalente Verstärkung" K durch die Forderung

* R. BOOTON: "Nonlinear Control Systems with Statistical Inputs";
M.I.T.-Report No 61, März 1952

festgelegt ist, daß der nichtlineare Verzerrungsanteil einen minimalen Leistungsinhalt besitzen soll.

Das von BOOTON angegebene Verfahren hat die Grundlage einer großen Zahl von Folgearbeiten über Fragen der statistischen Linearisierung gebildet. Als direkte Erweiterungen müssen in erster Linie die von KAZAKOV [1] vorgenommene Erweiterung auf den Fall eines mittelwertbehafteten Eingangssignals sowie die Ausdehnung auf den Fall mehrerer Eingangssignale [2], [3] genannt werden. Neben diesen Verallgemeinerungen bezüglich der Eingangssignale ist die Ausdehnung der statistischen Linearisierung auf spezielle dynamische Nichtlinearitäten zu nennen [4].

Die vorliegende Arbeit bringt ebenfalls eine Erweiterung des BOOTONschen Ansatzes und zwar dahingehend, daß für speicherfreie Nichtlinearitäten mit einer eindeutigen Kennlinie ein optimales nichtlineares Ersatzsystem bestimmt wird.

Eine derartige Erweiterung wird durch die folgenden Feststellungen nahegelegt oder sogar notwendig:

1. Zahlreiche für die äquivalente Verstärkung getroffene Aussagen legen die Vermutung nahe, daß es sich dabei um Spezialfälle von allgemeineren Aussagen handelt. So ergibt sich beispielsweise für ein GAUSS-verteiltes Eingangssignal die Autokorrelationsfunktion am Ausgang des linearen Ersatzsystems als erstes Glied einer Reihenentwicklung der Autokorrelierten am Ausgang des nichtlinearen Systems.
2. Als Ersatzbeschreibung für die Nichtlinearität ist die äquivalente Verstärkung unzureichend, da sich die Leistungen der Ausgangssignale von Nichtlinearität und Ersatzsystem häufig um mehr als 50% unterscheiden.
3. Die Anwendung der statistischen Linearisierung im nichtlinearen Regelkreis mit GAUSSschen Eingangssignalen führt nur dann zu brauchbaren Näherungswerten, wenn das Eingangssignal der Nichtlinearität möglichst gut GAUSSverteilt ist. Das bedeutet, daß die linearen Systemabschnitte des Regelkreises den durch die Nichtlinearität verursachten Verzerrungsanteil weitgehend unterdrücken müssen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Methode der statistischen Linearisierung für den geschlossenen Kreis unbrauchbar.

Für die vorliegende Arbeit ergibt sich daher als Zielsetzung die Herleitung und Untersuchung der Eigenschaften eines nichtlinearen Ersatzsystems, das die äquivalente Verstärkung als Spezialfall enthält. Da sich das Ersatzsystem als stark abhängig von der Verteilungsdichte des Eingangssignals erweist, liegt ein weiterer Schwerpunkt darin, sämtliche Aussagen unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen an die statistischen Eigenschaften des Eingangssignals herzuleiten. Ferner ist die Anwendbarkeit der nichtlinearen Ersatzsysteme für die genäherte Beschreibung von nichtlinearen Regelkreisen zu überprüfen. Die Herleitung eines gegenüber der üblichen linearisierten Behandlung nichtlinearer Regelkreise verbesserten Verfahrens erfolgt dabei unter Berücksichtigung des nicht-GAUSSschen Charakters der im geschlossenen Kreis auftretenden Signale.

Diesen Problemstellungen entsprechend gliedert sich die Arbeit in drei Teile. Der erste Teil (Kap. 2 und 3) besitzt vorbereitenden Charakter und beinhaltet schwerpunktmäßig die für die weiteren Untersuchungen grundlegenden Reihenentwicklungen von ein- und zweidimensionalen Verteilungsdichtefunktionen. Der die Kapitel 4 bis 8 umfassende zweite Teil behandelt das nichtlineare Ersatzsystem für die isolierte Nichtlinearität, während die Kapitel 9 bis 12 des dritten Teils Untersuchungen über die Beschreibung des nichtlinearen Regelkreises enthalten.

2 BESCHREIBUNGSMÖGLICHKEITEN VON ZUFALLSVARIABLEN UND STOCHASTISCHEN PROZESSEN

2.1 ZUR DEFINITION VON ZUFALLSVARIABLEN UND STOCHASTISCHEN PROZESSEN

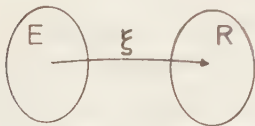
Vor einer zusammenfassenden Darstellung der in dieser Arbeit benutzten Kenngrößen, die der Beschreibung von Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen dienen, soll zunächst auf deren Definition eingegangen werden.

Es sei E die Menge der Elementarereignisse $e_1, \dots, e_n, \dots$, die bei einem Experiment alle möglichen vom Zufall bestimmten Versuchsausgänge beschreiben. Teilmengen von E , denen eine die KOLMOGOROFFschen Axiome [5] erfüllende Wahrscheinlichkeitsfunktion zugeordnet werden kann, werden Ereignisse genannt.

Eine auf E definierte eindeutige, reellwertige Funktion $\xi: E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Zufallsvariable, wenn für jede reelle Zahl u_0 aus dem Wertebereich von ξ die Menge derjenigen Elementarereignisse, für die

$$\xi(e) \leq u_0$$

erfüllt ist, ein Ereignis bildet. Eine Zufallsvariable ist somit als



"Funktion" definiert, nicht aber als Menge von reellen Zahlen, wie man aus der Bezeichnung "-variable" entnehmen könnte. Die Funktionswerte $u_i := \xi(e_i)$ heißen Realisierungen der Zufallsvariablen.

Bild 2.1

Wird jedem Elementarereignis e_i anstelle einer reellen Zahl eine reellwertige Funktion $x_i(t)$ eines reellen Parameters $t \in T$, der im allgemeinen die physikalische Bedeutung einer Zeit hat, zugeordnet, so gelangt man zu dem Begriff des stochastischen Prozesses. Es gilt also

$$\xi: E \rightarrow F \quad \text{mit} \quad F = \{x | x: T \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Die durch $\xi(e_i) = x_i(t)$ dem Elementarereignis e_i zugeordnete Zeitfunktion $x_i(t)$ (siehe Bild 2.2a) wird als Musterfunktion oder Repräsentant des stochastischen Prozesses bezeichnet.

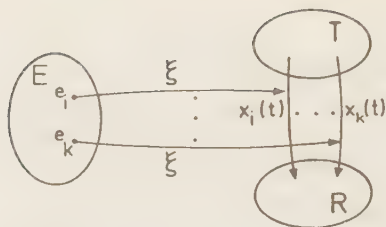


Bild 2.2a

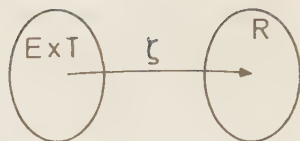


Bild 2.2b

Für einen festen Wert $t = t_k$ erhält man offensichtlich wieder eine Zufallsvariable. Daher kann ein stochastischer Prozeß auch durch die von t parametrisierte Menge

$$\mathcal{Z} = \{ \xi(t_1), \dots, \xi(t_n), \dots \}, \quad t_k \in T$$

von Zufallsvariablen charakterisiert werden. Für eine kontinuierliche Parametermenge ist auch die Menge $\mathcal{Z}$ kontinuierlich. In dieser Arbeit soll T stets den gesamten Bereich der reellen Zahlen umfassen.

Geht man nun von der Menge $\mathcal{Z}$ aus, so ist leicht einzusehen, daß ein stochastischer Prozeß als eine auf $E \times T$ definierte Abbildung ζ in R erklärt werden kann, die jedem Paar (e, t) eine reelle Zahl u zuordnet

-Bild 2.2b- :

$$\zeta: E \times T \rightarrow R \quad \text{bzw} \quad \zeta(e, t) = u \quad (2.1)$$

Man erhält hieraus sofort

für $t = t_k$: $\zeta(e, t_k) = \xi(t_k)$, d.h. eine Zufallsvariable,

für $e = e_i$: $\zeta(e_i, t) = x_i(t)$, d.h. eine Musterfunktion.

Die hier gewählte Definition eines stochastischen Prozesses entspricht zwar nicht der maßtheoretisch orientierten Definition, wie sie in der modernen Mathematik gebräuchlich ist [6], jedoch ermöglicht sie eine hinreichend theoretisch fundierte Behandlung von physikalischen und ingenieurwissenschaftlichen Problemen.

Um eine weitgehende Vereinfachung der Symbolik zu erreichen, soll folgende Vereinbarung getroffen werden:

Die unabhängige Variable e wird im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen nicht mehr explizit aufgeführt: $\zeta(e, t) =: \zeta(t)$;

bei mit $x_1(t), \dots, x_n(t)$ bezeichneten Musterfunktionen wird der Prozeß entsprechend mit $x(t)$ anstatt mit $\zeta(t)$ bezeichnet.

2.2 KENNGRÖSSEN VON ZUFALLSVARIABLEN UND STOCHASTISCHEN PROZESSEN

Für eine Zufallsvariable x wird durch die Ungleichung

$$x(e) \leq u, \quad e \in E, u \in \mathbb{R}$$

ein Ereignis $\{x \leq u\}$ bestimmt, nämlich die Menge der Elementarereignisse, für die die durch x zugeordneten reellen Zahlen höchstens gleich u sind. Diesem Ereignis ist nach Voraussetzung eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Wird nun u über den Wertebereich der Zufallsvariablen variiert, so erhält man eine vollständige Beschreibung der Zufallsvariablen x durch Wahrscheinlichkeiten in Form der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion:

$$P_x(u) := W \{x \leq u\}. \quad (2.2)$$

Die durch (2.2) definierte Funktion hat bekanntlich zwischen den Funktionswerten Null und Eins einen monoton wachsenden Verlauf.

Aussagen über die Änderung der Verteilung ergeben sich aus der zugehörigen differentiellen Form, der sog. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (auch: "Verteilungsdichtefunktion"):

$$\begin{aligned} p_x(u) &:= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} W \{u < x \leq u + \Delta u\} \\ &= \frac{d}{du} P_x(u). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Existenzprobleme des Differentialquotienten können vermieden werden, wenn die Dichtefunktion als Distribution aufgefaßt wird. Es gilt $p_x(u) \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} p_x(u) du = 1$.

Bei mehreren Zufallsvariablen, die auf einer gemeinsamen Menge E definiert seien, interessiert neben den eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen vor allem die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der Ereignisse $\{x_1 \leq u_1\}, \dots, \{x_n \leq u_n\}$. Aus der durch

$$P_{x_1 \dots x_n}(u_1 \dots u_n) := W \{x_1 \leq u_1, \dots, x_n \leq u_n\} \quad (2.4)$$

definierten n -dimensionalen Verbundverteilungsfunktion ergeben sich die Verteilungen geringerer Dimension als sog. Randverteilungen durch

$$\lim_{u_{i+1}, \dots, u_n \rightarrow \infty} P_{x_1 \dots x_n}(u_1, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = P_{x_1 \dots x_i}(u_1, \dots, u_i) \quad (2.5)$$

Aus (2.4) folgt durch partielle Differentiation die n-dimensionale Verbunddichte:

$$p_{x_1, \dots, x_n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} P_{x_1 \dots x_n}(u_1, \dots, u_n) \quad (2.6)$$

Umgekehrt kann aus der Dichtefunktion durch Integration die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Funktion der oberen Integrationsgrenze gewonnen werden. Die der Gleichung (2.5) entsprechende Aussage lautet dann:

$$P_{x_1 \dots x_i}(u_1, \dots, u_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_{x_1 \dots x_n}(u_1, \dots, u_n) du_{i+1} \dots du_n \quad (2.7)$$

Zu der Beschreibung eines stochastischen Prozesses $x(t)$ gelangt man sofort, wenn in den Definitionsgleichungen (2.4) bzw. (2.6) x_i durch die Zufallsvariable $x(t_i)$, $i=1, \dots, n$, ersetzt wird. Eine für die Anwendung hinreichende statistische Beschreibung eines stochastischen Prozesses ist dann vorhanden, wenn die n-dimensionale Verbundverteilung für jedes n-Tupel $(t_1, \dots, t_n)$ und für beliebig großes n bekannt ist [7]. Man beachte in diesem Zusammenhang die Gleichungen (2.5) und (2.7).

Aus den das statistische Verhalten beschreibenden Verteilungs- bzw. Dichtefunktionen lassen sich mit Hilfe der Erwartungswertbildung zahlreiche weitere Kenngrößen ableiten. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen x wird durch das Funktional

$$\mathbb{E}\{x\} := \int_{-\infty}^{\infty} u p_x(u) du \quad (2.8)$$

definiert. Ist x eine Funktion von Zufallsvariablen

$$x = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

so gilt die wichtige Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{x\} &= \int_{-\infty}^{\infty} u p_x(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \dots, u_n) p_{x_1 \dots x_n}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

mit deren Hilfe gezeigt werden kann, daß durch den Erwartungswertoperator sogar ein lineares Funktional definiert wird. Ein Erwartungswert existiert, wenn das zugehörige Integral absolut konvergiert. Dies sei von den in dieser Arbeit betrachteten Erwartungswerten stets angenommen.

Durch Wahl spezieller Funktionen $f(x)$ bzw. $f(x,y)$ ergeben sich gemäß (2.9) folgende grundlegende statistische Kennwerte:

Nullmomente der Ordnung k	m_k	$:= \mathcal{E}\{x^k\}$	(2.10a-g)
linearer Mittelwert von x	m_x	$:= \mathcal{E}\{x\} \quad (= m_1)$	
Zentralmoment der Ordnung k	μ_k	$:= \mathcal{E}\{(x-m_x)^k\}$	
Varianz o. Streuungsquadrat	σ_x^2	$:= m_2 - m_1^2 \quad (= \mu_2)$	
Verbundmomente von n Zvn der Ordnung $i_1 + \dots + i_n$	$m_{i_1, \dots, i_n}$	$:= \mathcal{E}\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\}$	
Kovarianz von x und y	r_{xy}	$:= \mathcal{E}\{(x-m_x)(y-m_y)\} \quad (= \mu_{11})$	
Korrelationskoeffizient	ρ_{xy}	$:= \frac{r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$	

Von besonderer Bedeutung ist der Erwartungswert der durch $y := e^{jvx}$, $v \in \mathbb{R}$ definierten komplexen Zufallsvariablen y . Dieser von v abhängende und als charakteristische Funktion $\Psi_x(v)$ bekannte Erwartungswert kann als inverse Fouriertransformation der Dichte $p_x(u)$ gedeutet werden. Umgekehrt ergibt die Fouriertransformation der Dichte die charakteristische Funktion. Aus der Taylorentwicklung von $\Psi_x(v)$ um $v=0$ erhält man den Zusammenhang

$$\left. \frac{d^k}{dv^k} \Psi_x(v) \right|_{v=0} = j^k \cdot m_k \quad (2.11)$$

Da $p_x(u)$ und $\Psi_x(v)$ bezüglich ihres statistischen Informationsgehaltes gleichwertig sind, folgt aus dieser Beziehung, daß für die vollständige statistische Beschreibung der Zufallsvariablen x alle Momente m_k , $k=1,2,\dots$ notwendig sind. Eine entsprechende Aussage ergibt sich auch für die n -dimensionalen Verbundmomente, wobei für diesen Fall die charakteristische Funktion durch

$$\Psi_{x_1 \dots x_n}(v_1, \dots, v_n) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(v_1 u_1 + \dots + v_n u_n)} p_{x_1 \dots x_n}(u_1 \dots u_n) du_1 \dots du_n \quad (2.12)$$

definiert ist. Der Zusammenhang mit den Verbundmomenten lautet dann mit $i_1 + i_2 + \dots + i_n = k$:

$$j^k \mathcal{E}\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\} = \left. \frac{\partial^k}{\partial v_1^{i_1} \dots \partial v_n^{i_n}} \Psi(v_1 \dots v_n) \right|_{v_1 = \dots = v_n = 0} \quad (2.13)$$

Aus der charakteristischen Funktion kann ein weiterer Satz von Kenngrößen, die sog. Kumulanten $\lambda_{i_1 \dots i_n}$, hergeleitet werden. Sie ergeben sich durch eine Taylorentwicklung von $\ln[\Psi_{x_1 \dots x_n}(v_1 \dots v_n)]$ um Null:

$$\ln [\Psi_{x_1 \dots x_n}(v_1 \dots v_n)] = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} \lambda_{i_1 \dots i_n} \frac{(v_1)^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{(v_n)^{i_n}}{i_n!} \quad (2.14)$$

Wird hier für Ψ die Potenzreihe eingesetzt, so erhält man die Kumulanten als Funktion von den Verbundmomenten $\mathcal{E}\{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}\}$. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 11.2 benutzt und genauer erläutert werden.

Die angegebenen Kenngrößen können auch zur Charakterisierung eines stochastischen Prozesses benutzt werden. Da die Dichtefunktion in diesem Fall von den Parametern $t_1, \dots, t_n$ abhängt, was bisweilen durch die Schreibweise $p_x(t)(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n)$ ausgedrückt wird, ergeben sich die daraus abgeleiteten Erwartungswerte als Funktionen der unabhängigen Variablen $t_1, \dots, t_n$. Insbesondere hängen die einfachsten eindimensionalen Kenngrößen eines stochastischen Prozesses, der lineare Mittelwert und die Varianz, nur von einem Argument t ab:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = m_x(t), \quad \mathcal{E}\{[x(t) - m_x(t)]^2\} = \sigma_x^2(t).$$

Die einfachste zweidimensionale Kenngröße, die sog. Autokorrelationsfunktion des Prozesses $x(t)$, besitzt bereits zwei Zeitargumente t_1, t_2 :

$$\phi_{x_1 x_2}(t_1, t_2) := \mathcal{E}\{x(t_1)x(t_2)\}. \quad (2.15)$$

Entsprechend wird die Autokovarianzfunktion des Prozesses durch

$$c_{x_1 x_2}(t_1, t_2) := \mathcal{E}\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\} \quad (2.16)$$

definiert.

Die Autokorrelationsfunktion kann als Spezialfall der n -dimensionalen Momentfunktionen des Prozesses $x(t)$ verstanden werden, die durch

$$\phi_{x_1 i_1 \dots x_n i_n}(t_1, \dots, t_n) := \mathcal{E}\{x^{i_1}(t_1) \dots x^{i_n}(t_n)\} \quad (2.17)$$

definiert werden. Häufig wird hier wie auch bei den in (2.15) und (2.16) definierten Funktionen auf eine unterschiedliche Kennzeichnung der Indizes verzichtet.

Eine erhebliche Vereinfachung kann im Fall einer speziellen Klasse von Prozessen erzielt werden.

Der stochastische Prozeß $x(t)$ heißt stationär (stationär im engen Sinn, strikt stationär), wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen

$$x(t_1 + \Delta t), \dots, x(t_n + \Delta t)$$

für jedes n bei beliebigen festen Zeitpunkten $t_1, \dots, t_n$ nicht von Δt abhängt.

Diese Definition bedeutet für die Dichtefunktionen:

$$\begin{aligned} p_x(u;t) &= p_x(u) \\ p_x(u_1, u_2; t_1, t_2) &= p_x(u_1, u_2; t_2 - t_1) \\ p_x(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) &= p_x(u_1, \dots, u_n; t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1). \end{aligned}$$

Folglich hängen auch die für n Zufallsvariable gebildeten Erwartungswerte nur von $n-1$ Zeitargumenten ab. Die eindimensionalen Momente sind daher zeitunabhängig: $m_x(t) \equiv m_x$, $G_x^2(t) \equiv G_x^2$; die zweidimensionalen Erwartungswerte wie etwa Korrelations- und Kovarianzfunktion hängen nur von der Differenz $\tau := t_2 - t_1$ ab:

$$\phi_{xx}(\tau) := \mathcal{E} \{ x(t_1) \cdot x(t_1 + \tau) \}, \quad t_1 \text{ beliebig} \quad (2.18a)$$

$$C_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) - m_x^2. \quad (2.18b)$$

Beschränkt man sich auf die Forderung, daß nur die Kovarianzfunktion von τ abhängig sei, so gelangt man zu der Kovarianzstationarität (Stationarität im weiteren Sinn). In dieser Arbeit soll jedoch unter Stationarität stets die Stationarität im engen Sinn verstanden werden.

Ein meßtechnischer Zugang zu den statistischen Kenngrößen wird durch eine weitere Einengung der stochastischen Prozesse geliefert.

Ein stochastischer Prozeß heißt ergodisch, wenn die durch die n -dimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung des Prozesses bestimmten statistischen Eigenschaften aus jeder einzelnen Musterfunktion des Prozesses entnommen werden können.

Insbesondere sollen die durch "Ensemblemittelung" gewonnenen Erwartungswerte durch "Zeitmittelung" aus einer beliebig herausgegriffenen Musterfunktion bestimmt werden können. Die für verschiedene Erwartungswerte bestehenden Ergodensätze besagen, daß unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen tatsächlich Ensemble- und Zeitmittelung mit Wahrscheinlichkeit Eins übereinstimmen. In der hier angeführten Allgemeinheit kann die Ergodeneigenschaft aber nur als eine den praktischen Erfordernissen entgegenkommende Hypothese postuliert werden. Da die Musterfunktion nur über ein endliches Zeitintervall meßtechnisch ausgewertet werden kann, ergeben sich selbstverständlich nur Schätzwerte für die statistischen Kenngrößen

Wird ein stochastischer Prozeß durch die Autokorrelationsfunktion gekennzeichnet, so ist es in vielen Fällen zweckmäßig, eine mit Hilfe einer Funktionaltransformation gewonnene äquivalente Beschreibung zu betrachten. Das Auto-Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(\omega)$ wird durch die folgende Integraltransformation definiert:

$$S_{xx}(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \phi_{xx}(\tau) d\tau, \quad (2.19)$$

wobei das uneigentliche Integral als Grenzwert im Sinne der Distributionentheorie verstanden werden soll. $S_{xx}(\omega)$ ist abgesehen von dem Faktor $1/\pi$ gerade die Fouriertransformation der Korrelationsfunktion. Die Umkehrtransformation lautet dann

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_{xx}(\omega) d\omega. \quad (2.20)$$

Das durch (2.19) und (2.20) gegebene Transformationspaar trägt die Bezeichnung WIENER-KHINTCHIN-Transformationen. Wird in (2.20) $\tau=0$ gesetzt und verwendet man die Eigenschaft $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$, so erhält man einen Zusammenhang zwischen dem quadratischen Mittelwert des Prozesses, d.h. seiner Gesamtleistung, und der Leistungsdichte in Form von

$$\mathcal{E}\{x^2(t)\} = \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega. \quad (2.21)$$

Diese Beziehung erklärt sowohl die Bezeichnung von $S_{xx}(\omega)$ wie auch die von der Fouriertransformation abweichende Wahl der Faktoren in (2.19) und (2.20). Die hier gegebene spektrale Kennzeichnung erfordert einen zumindest kovarianzstationären Prozeß. Eine Verallgemeinerung auf instationäre Prozesse ist möglich. Die Ausweitung auf höherdimensionale Kennfunktionen wird in Abschnitt 11.1 behandelt werden.

Bisher wurden nur Kenngrößen für einen stochastischen Prozeß behandelt. Die Erweiterung zur Beschreibung zweier und mehrerer Prozesse ist offensichtlich. Grundlage dafür ist die mehrdimensionale Verbundwahrscheinlichkeit (2.4), wo jetzt aber die Zufallsvariablen x_i , $i=1, \dots, n$ durch Zufallsvariablen aus verschiedenen Prozessen ersetzt werden. So gelangt man mit Hilfe der Dichte $p_{xy}(t_1, t_2)(u, v)$ zu der Kreuzkorrelationsfunktion

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) := \mathcal{E}\{x(t_1)y(t_2)\} \quad (2.22)$$

Aus der Stationarität der beiden Prozesse $x(t)$ und $y(t)$ darf nicht gefolgert werden, daß dieser Erwartungswert nur von der Zeitdifferenz $t_2 - t_1 = \tau$ abhängt. Vielmehr ist eine Erweiterung des Stationaritätsbegriffes notwendig derart, daß entweder die τ -Abhängigkeit in (2.22) postuliert wird, oder aber allgemeiner gefordert wird, daß die Verbundverteilungsgesetze der Prozesse $x(t)$ und $y(t)$ sich beim Übergang zu den Prozessen $x(t+\Delta t)$, $y(t+\Delta t)$ nicht ändern.

Zu dem Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{xy}(\omega)$ gelangt man, wenn in der W.K-Transformation (2.19) $\phi_{xx}(\tau)$ durch $\phi_{xy}(\tau)$ ersetzt wird.

Zwei Prozesse $x(t)$ und $y(t)$ heißen unkorreliert, wenn ihre Kreuzkorrelationsfunktion für alle τ gleich dem Produkt der linearen Mittelwerte ist:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(\tau) &:= \mathbb{E}\{x(t) \cdot y(t+\tau)\} = \mathbb{E}\{x(t)\} \cdot \mathbb{E}\{y(t+\tau)\} \\ &= m_x \cdot m_y\end{aligned}\quad (2.23)$$

Die Prozesse heißen orthogonal, wenn

$$\phi_{xy}(\tau) \equiv 0 \text{ für alle } \tau$$

gilt. (2.23) ist sicher dann erfüllt, wenn die Prozesse statistisch unabhängig sind, d.h. wenn

$$p_{x(t), y(t+\tau)}(u, v) = p_x(u) \cdot p_y(v), \quad \tau \text{ beliebig} \quad (2.24)$$

erfüllt ist. Die Umkehrung dieses Schlusses ist jedoch im allgemeinen nicht möglich.

Die bisher betrachteten Kenngrößen basieren auf der Frage nach dem gleichzeitigen Eintreten mehrerer Ereignisse. Es kann aber auch nach der Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses $\{y \leq v\}$ unter der Bedingung, daß das Ereignis $\{u < x \leq u + \Delta\}$ eingetreten ist, gefragt werden. Dies führt zur Definition der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen y unter der Bedingung, daß die Zufallsvariable x den Wert u annimmt [7]:

$$\begin{aligned}p_{y|x=u}(v, u) &:= \lim_{\Delta \rightarrow 0} W \{y \leq v \mid u < x \leq u + \Delta\} \\ &:= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{p_{xy}(u + \Delta, v) - p_{xy}(u, v)}{p_x(u + \Delta) - p_x(u)}\end{aligned}\quad (2.25)$$

Für die durch Differentiation nach v entstehende bedingte Dichte ergibt sich hieraus der Zusammenhang:

$$p_{y|x=u}(v,u) = \frac{p_{xy}(u,v)}{p_x(u)} \quad (2.26)$$

Der mit dieser Dichte entsprechend (2.8) gebildete bedingte lineare Mittelwert der Zufallsvariablen y:

$$\mathbb{E}\{y|x=u\} := \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{p_{xy}(u,v)}{p_x(u)} dv \quad (2.27)$$

ist eine reelle Zahl, die aber davon abhängt, welchen Wert die Zufallsvariable x annimmt. Unter dem "bedingten Erwartungswert von y bezüglich x: $\mathbb{E}\{y|x\}$ " versteht man daher die Zufallsvariable, die den durch (2.27) gegebenen Wert annimmt, wenn x den Wert u annimmt. Hiervon ausgehend können zahlreiche Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte abgeleitet werden [7]. In dieser Arbeit wird hauptsächlich die Beziehung (2.27) im Zusammenhang mit der Approximation von Zufallsvariablen Anwendung finden.

2.3 DIE GRAM-CHARLIER-REIHE EINER VERTEILUNGSDICHTE

Eine bei statistischen Problemen häufig auftretende Aufgabe besteht darin, für eine unbekannte Verteilungsdichtefunktion $p_x(u)$ einer Zufallsvariablen x mit Hilfe von meßtechnisch erfaßbaren Kenngrößen einen analytischen Ausdruck anzugeben. Da nur endlich viele solcher Meßgrößen zur Verfügung stehen können, wird es sich dabei im allgemeinen nur um einen Näherungsausdruck handeln.

Eine Aussage darüber, welche statistischen Kenngrößen zweckmäßig zu wählen sind und wie mit ihrer Hilfe eine analytische Beschreibung der Verteilungsdichte erfolgen kann, bekommt man aus einer Reihendarstellung der Dichte, der GRAM-CHARLIER-Reihe:

$$p_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u-m_x}{\sigma_x} \right)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{H_k \left(\frac{u-m_x}{\sigma_x} \right)}{\sqrt{k!}} \quad (2.28)$$

Der Faktor vor der Summe ist die GAUSSsche Verteilungsdichte; die Entwicklungsfunktionen $H_k \left(\frac{u-m_x}{\sigma_x} \right)$ sind die bezüglich der GAUSS-Dichte orthonormalen HERMITE'schen Polynome:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_m(v)}{\sqrt{m!}} \cdot \frac{H_n(v)}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \delta_{m,n} =: \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \quad (2.29)$$

Für diese gilt

$$\begin{aligned} H_0(v) &= 1 & H_3(v) &= v^3 - 3v \\ H_1(v) &= v & H_4(v) &= v^4 - 6v^2 + 3 \\ H_2(v) &= v^2 - 1 & \vdots & \\ & & \vdots & \\ H_{n+1}(v) &= v H_n(v) - n H_{n-1}(v) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die Graphen der normierten HERMITE-Polynome H_0 bis H_5 zeigt Bild 2.3.

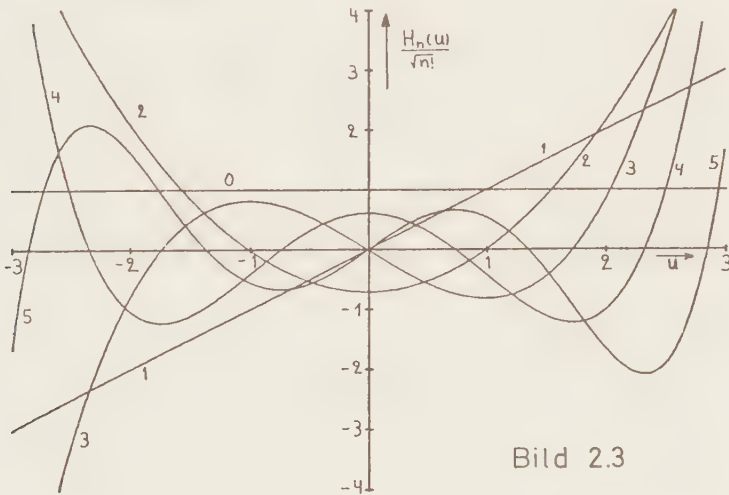


Bild 2.3

Die als Quasimomente bezeichneten Koeffizienten b_k der Reihenentwicklung (2.28) ergeben sich wegen der Orthonormalitätsbeziehung (2.29) sofort zu

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_k \left[\frac{u-m_x}{\sigma_x} \right]}{\sqrt{k!}} p_x(u) du, \quad (2.31)$$

sie können somit als Erwartungswerte der normierten HERMITE-Polynome gedeutet werden. Im einzelnen wird:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 & b_4 &= \frac{1}{4!} \left[\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \right] \\ b_1 &= b_2 = 0 & b_5 &= \frac{1}{5!} \left[\frac{\mu_5}{\sigma_x^5} - 10 \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \right] \\ b_3 &= \frac{1}{3!} \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} & b_6 &= \frac{1}{6!} \left[\frac{\mu_6}{\sigma_x^6} - 15 \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} + 30 \right], \end{aligned}$$

so daß die Entwicklung (2.28) in der Form

$$p_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u-m_x}{\sigma_x} \right)^2} \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{\sqrt{k!}} H_k \left(\frac{u-m_x}{\sigma_x} \right) \right] \quad (2.32)$$

geschrieben werden kann. Für eine GAUSS-verteilte Zufallsvariable x muß $b_0=1$ und $b_k=0$ für $k > 0$ gelten. Davon überzeugt man sich aber sofort, indem in der Bestimmungsgleichung (2.31) $1=H_0\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)$ ergänzt und die Orthogonalitätsbedingung (2.29) angewendet wird. Durch $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{\sqrt{k!}} H_k\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)$ wird somit die relative Abweichung der Dichte $p_x(u)$ von einer GAUSSschen Dichte mit gleichem linearen Mittelwert und gleicher Streuung dargestellt. Für symmetrische Dichten $p_x(u+m_x) = p_x(m_x-u)$ verschwinden alle Koeffizienten b_{2k+1} , $k=1,2,\dots$. Daher kann der Koeffizient b_3 als erstes Maß für die Abweichung von dieser Symmetrie betrachtet werden und wird daher als Schiefe bezeichnet. Der Koeffizient $b_4 \cdot \sqrt{4!}$ schließlich wird als Exzeß γ_x bezeichnet:

$$\gamma_x := \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \sqrt{4!} b_4. \quad (2.33)$$

Mit den Quasimomenten b_k ist ein weiterer Satz von statistischen Kenngrößen vorhanden, der zusammen mit m_x und σ_x dieselbe statistische Information beinhaltet wie die Verteilungsdichte. Bei ergodischen Prozessen $x(t)$ kann in (2.30) die Ensemblemittelung durch die Zeitmittelung an einem Repräsentanten ersetzt werden:

$$\sqrt{k!} b_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T H_k \left[\frac{x(t)-m_x}{\sigma_x} \right] dt,$$

woraus sofort eine Meßvorschrift für einen Schätzwert $\hat{b}_k$ zu entnehmen

ist. Wird nun bei N vorhandenen Quasimomenten die Entwicklung (2.28) nach dem N-ten Glied abgebrochen, so gibt die dadurch entstandene Partialsumme $\tilde{p}_N(u)$ einen Näherungsausdruck für die Dichte $p_x(u)$. Dabei ist zu beachten, daß $\tilde{p}_N(u)$ nicht mehr die Eigenschaften einer Verteilungsdichte besitzen muß. Zwar ergibt die Integration des Näherungsausdruckes wegen (2.29) den Wert Eins, jedoch können je nach Größe der Quasimomente negative Werte für die "Approximationsdichte" auftreten. Dies sei am Beispiel

$$\tilde{p}_4(u) = \varphi_x(u) \cdot \left[1 + \frac{\delta_x}{4!} H_4(u) \right]$$

mit der Normalverteilungsdichte $\varphi_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ erläutert. Aus der Forderung $\text{Min} \left\{ 1 + \frac{\delta_x}{4!} H_4(u) \right\} \geq 0$ ergibt sich wegen $\text{Min}_u \{ H_4(u) \} = -6$ als Forderung für einen nicht negativen Verlauf von $\tilde{p}_4(u)$ sofort

$$\delta_x \leq 4.$$

Diese Beziehung gilt auch für beliebige m_x und δ_x , so daß für das vierte Zentralmoment $\mu_4 := \mathcal{E}\{(x-m_x)^4\}$ zu fordern ist:

$$\mu_4 \leq 7 \cdot \delta_x^4.$$

Werden diese Bedingungen nicht erfüllt, so hat das für die zugehörige Näherung der Verteilungsfunktion einen nicht monotonen Verlauf zur Folge. In einem derartigen Fall müssen Quasimomente höherer Ordnung berücksichtigt werden.

Die hier auf formalem Wege eingeführte Reihendarstellung (2.32) kann auch aus einem Approximationsproblem gewonnen werden. Die Forderung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_x(u)}{\varphi_x(u)} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \right]^2 \varphi_x(u) du = \text{Min} (b_0, b_1, \dots)$$

wird gerade durch die Koeffizienten b_k nach (2.31) gelöst. Aussagen über die Konvergenz der Reihe findet man bei CRAMER [8]. Jedoch ist das Konvergenzproblem für die praktische Anwendung von nur sehr geringem Interesse. Im Vordergrund steht vielmehr die Frage, ob und wie mit möglichst wenig Quasimomenten eine brauchbare Approximation zu erreichen ist. Es ist offensichtlich, daß die Reihe (2.32) um so rascher konvergiert, je GAUSS-ähnlicher die zu approximierende Dichtefunktion ist. Dieses auch bei Funktionaltransformationen bekannte Verhalten impliziert, daß man für die Näherung mit wenigen Quasimomenten auskommt. Ausführliche Untersuchungen darüber sind in [9] zu finden. Dort wird auch gezeigt,

daß die Koeffizienten b_k meßtechnisch hinreichend gut zu erfassen sind, um eine Synthese der Verteilungsdichte entsprechend (2.32) durchzuführen.

Für von der GAUSS-Verteilung stark abweichende Verteilungen konvergiert die Reihe (2.32) entweder überhaupt nicht oder nur sehr langsam. In einem derartigen Fall muß eine andersartige Reihenentwicklung herangezogen werden, in der die die orthogonalen Entwicklungspolynome bestimmende Gewichtungsfunktion der zu approximierenden Dichte besser angepaßt ist. Ein derartiges Beispiel findet man in der Arbeit [10], wo die Verteilungsdichte der Kettenlänge von Polymeren durch eine Summe von LAGUERRE'schen Polynomen $L_k(\frac{u}{a})$ angenähert wird, die mit dem Faktor $e^{-\frac{u}{a}}$ gewichtet wird.

2.4 EIN BEISPIEL FÜR DIE NÄHERUNGSDARSTELLUNG VON $p_X(u)$

Ein stochastischer Prozeß $x(t)$ werde durch Addition zweier statistisch unabhängiger Prozesse $r(t)$ und $z(t)$ gebildet. Dabei sei $r(t)$ ein GAUSS-verteilter Prozeß, $z(t)$ sei ein binäres Geräusch, das die Amplitudenwerte $\pm A$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annimmt. In Bild 2.4 ist jeweils eine Musterfunktion dieser Prozesse zu sehen, wobei $z(t)$ durch ein pseudobinäres Rauschen realisiert worden ist.

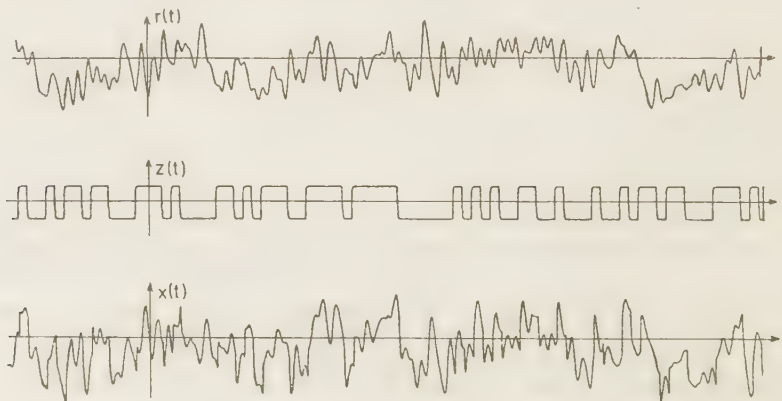


Bild 2.4

Aus den beiden Verteilungsdichten

$$p_r(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_r} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_r^2}}, \quad p_z(u) = \frac{1}{2} [\delta(u-A) + \delta(u+A)]$$

folgt wegen der vorausgesetzten statistischen Unabhängigkeit durch Faltung die Dichte $p_x(u)$ zu

$$p_x(u) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sigma_r} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u-A}{\sigma_r} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u+A}{\sigma_r} \right)^2} \right] \quad (2.34)$$

Es ist $m_x=0$; für die Varianz σ_x^2 folgt wegen $\sigma_z^2=A^2$:

$$\sigma_x^2 = \sigma_r^2 + A^2.$$

Bild 2.5 zeigt die Graphen von $p_x(u)$ für verschiedene Parameter A , wobei $\sigma_r=1$ gesetzt worden ist. Für $A < 1$ kann $p_x(u)$ noch als GAUSSähnlich bezeichnet werden. Für $A > 1$ dagegen wird die Dichte zweigipflig.

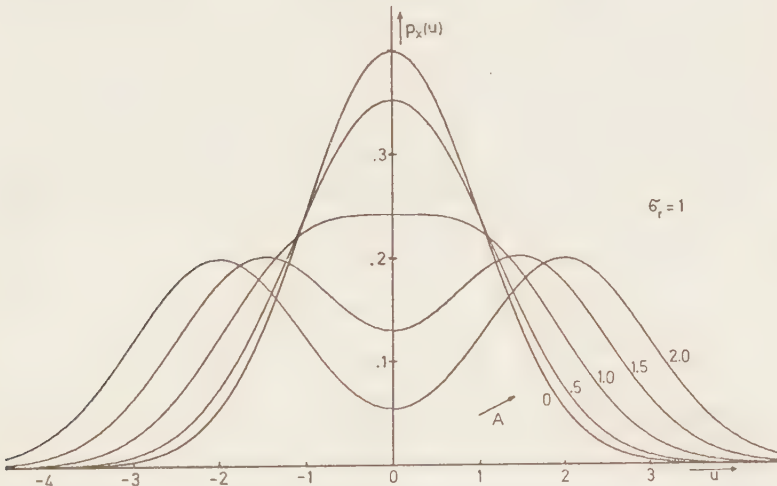


Bild 2.5

Die Berechnung der Quasimomente erfolgt zweckmäßigerweise mit Hilfe der Gleichungen (2.31), so daß zunächst die Zentralmomente zu bestimmen sind.

Man erhält wegen $\mu_{xk} = E\{x^k\}$ nach einiger Rechnung

$$\mu_{x4} = 3 [\sigma_r^2 + A^2]^2 - 2 \sigma_r^2$$

$$\mu_{x6} = 15 [\sigma_r^2 + A^2]^3 - 30 \sigma_r^2 A^4 - 14 A^6$$

Für die Quasimomente ergeben sich dann folgende Ausdrücke

$$b_4 = - \frac{2}{\sqrt{4!}} \left[\frac{A^2}{A^2 + \sigma_r^2} \right]^2 \quad b_6 = \frac{16}{\sqrt{6!}} \left[\frac{A^2}{A^2 + \sigma_r^2} \right]^3 .$$

Über den Spezialfall $\sigma_r=0$ kann schließlich auf den Fall beliebiger Indices geschlossen werden:

$$\text{Es gilt} \quad b_{2k} = \frac{H_{2k}(1)}{\sqrt{2k!}} \left[1 + \left(\sigma_r/A \right)^2 \right]^{-k} ,$$

wo $H_{2k}(1)$ der Wert des HERMITE-Polynoms der Ordnung $2k$ an der Stelle Eins ist.

Mit den derart bestimmten Koeffizienten ist der graphische Verlauf der GRAM-CHARLIERSchen Näherungen $\hat{p}_k(u)$ für $p_x(u)$ in den Bildern 2.6a,b dargestellt. Dabei sagt die Schreibweise $\hat{p}_k(u)$ aus, daß das letzte Summenglied noch b_k enthält. Für den Fall $A=1$, $\sigma_r=1$ - Bild 2.6a - ist, da $p_x(u)$ noch nicht sehr stark von der GAUSS-schen Form abweicht, ein gutes Approximationsverhalten der Näherungen festzustellen. Die Berücksichtigung von b_4 und damit des Exzesses δ_x wird hier bereits hinreichen. Bei $A=2$ dagegen muß mindestens b_6 berücksichtigt werden, um überhaupt eine zweigipflige Näherung zu erhalten, die allerdings noch keinerlei Genauigkeitsansprüchen gerecht wird.

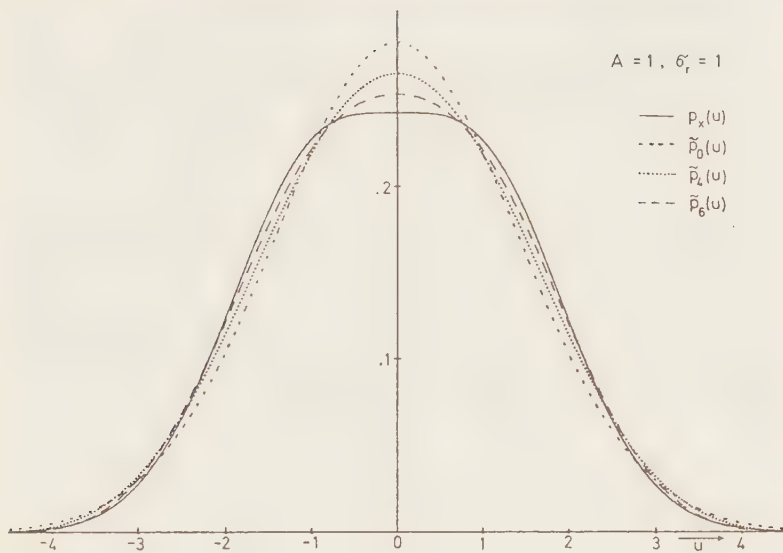


Bild 2.6a

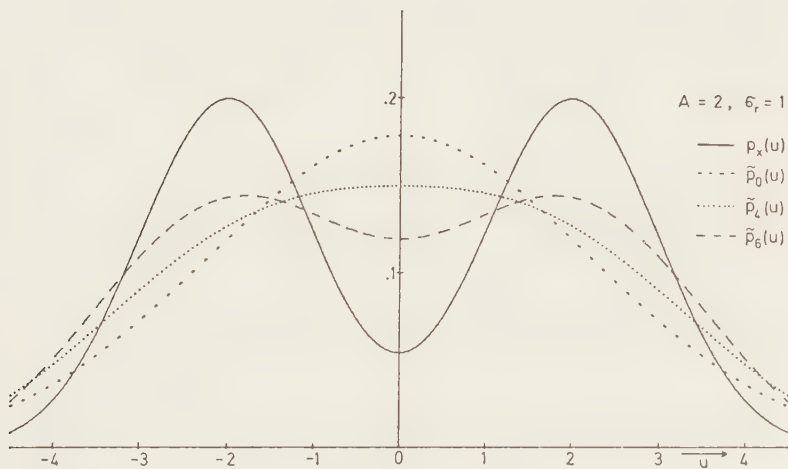


Bild 2.6b

3. ZUR REIHENENTWICKLUNG VON VERBUNDVERTEILUNGSDICHTEN

Der statistische Zusammenhang zweier Zufallsvariablen x und y , die auf einem gemeinsamen Ereignisfeld definiert seien, wird durch die Verbundverteilungsdichte $p_{xy}(u,v)$ gegeben. Diese Dichte wird zur Bestimmung von statistischen Kenngrößen wie dem Korrelationskoeffizienten oder Verbundmomenten höherer Ordnung benötigt. Ähnlich, wie bei der eindimensionalen Dichte durch Abbruch der Reihenentwicklung der Zugang zu Näherungsausdrücken geliefert wird, können auch aus zweidimensionalen Reihenentwicklungen neue statistische Beschreibungsmöglichkeiten und vor allem Näherungsformeln entwickelt werden. Eine ausführlichere Betrachtung der Reihenentwicklungen von zweidimensionalen Verbundverteilungsdichten ist erstmals bei BARRETT und LAMPARD [11] zu finden.

3.1 HERLEITUNG UND EIGENSCHAFTEN EINER ENTWICKLUNG MIT ORTHOGONALEN FUNKTIONEN

Die Verbundverteilungsdichte $p_{xy}(u,v)$ besitze eine Entwicklung der Form

$$p_{xy}(u,v) = p_x(u) p_y(v) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \varphi_{m,x}(u) \psi_{n,y}(v) \quad (3.1)$$

wobei angenommen wird, daß die Doppelreihe sowohl in u wie auch in v gleichmäßig konvergiert. In der Entwicklung (3.1) sind $p_x(u)$ und $p_y(v)$ die eindimensionalen Randdichten der Zufallsvariablen x und y :

$$p_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(u,v) dv$$

$$p_y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(u,v) du .$$

Sofern nicht anderes gesagt wird, sei hier als Wertebereich der Zufallsvariablen stets das Intervall $(-\infty, +\infty)$ angenommen. Die Entwicklungsfunktionen in (3.1) sind zunächst willkürlich. Um ihre Festlegung zu motivieren, wird (3.1) mit $\varphi_{k,x}(u)$ und $\psi_{l,y}(v)$ multipliziert und danach über u und v integriert. Da nach Voraussetzung Summation und Integration vertauscht werden dürfen, folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{k,x}(u) \psi_{l,y}(v) p_{xy}(u,v) du dv &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{k,x}(u) \varphi_{m,x}(u) p_x(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{l,y}(v) \psi_{n,y}(v) p_y(v) dv \end{aligned}$$

Diese Beziehung legt die Forderung nahe, daß die Funktionen $\varphi_{k,x}(u)$, $k=0,1,\dots$ und $\psi_{l,y}(v)$, $l=0,1,\dots$ jeweils ein vollständiges Orthonormalsystem bezüglich der eindimensionalen Dichtefunktionen $p_x(u)$ und $p_y(v)$ bilden mögen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{m,x}(u) \varphi_{k,x}(u) p_x(u) du = \delta_{m,k} \quad (3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,y}(v) \psi_{l,y}(v) p_y(v) dv = \delta_{n,l} \quad (3.3)$$

Dann können die Entwicklungskoeffizienten $a_{m,n}$ sofort angegeben werden zu

$$a_{m,n} = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi_{m,x}(u) \psi_{n,y}(v) p_{xy}(u,v) du dv \quad (3.4)$$

Die Entwicklungsfunktionen werden also wieder so gewählt, daß die Reihenentwicklungskoeffizienten auf einfachste Art bestimmt werden können. Die Beziehungen (3.2) bis (3.4) können als Erwartungswerte gedeutet werden und lauten dann

$$\mathcal{E}\{\varphi_{m,x}(x) \cdot \varphi_{k,x}(x)\} = \delta_{m,k} \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{E}\{\psi_{n,y}(y) \cdot \psi_{l,y}(y)\} = \delta_{n,l} \quad (3.3a)$$

$$a_{m,n} = \mathcal{E}\{\varphi_{m,x}(x) \cdot \psi_{n,y}(y)\} \quad (3.4a)$$

Die hier postulierte Reihendarstellung kann natürlich auch durch ein Minimisierungsproblem eingeführt werden: Der Quotient $\frac{p_{xy}(u,v)}{p_x(u)p_y(v)}$ soll durch eine Summe der Form $\sum_m \sum_n a_{m,n} \varphi_{m,x}(u) \psi_{n,y}(v)$ im quadratischen Mittel bezüglich der Belegungsfunktion $p_x(u) \cdot p_y(v)$ approximiert werden. Also wird gefordert

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_{xy}(u,v)}{p_x(u)p_y(v)} - \sum_m \sum_n a_{m,n} \varphi_{m,x}(u) \psi_{n,y}(v) \right]^2 p_x(u)p_y(v) du dv = \stackrel{!}{=} \text{Min}\{a_{m,n}\}$$

Wird auch hier die Orthonormalität der Entwicklungsfunktionen gefordert, so ergibt sich als Ergebnis dieser Aufgabe gerade die Beziehung (3.4). Auf eine Diskussion der in diesem Zusammenhang auftretenden Konvergenzfragen soll hier verzichtet werden. Derartige Einzelheiten findet man für den eindimensionalen Fall in [12] oder [13] und können entsprechend verallgemeinert werden.

Um zu weiteren Aussagen über die Koeffizienten $a_{m,n}$ zu gelangen, überlegt man sich zunächst, daß unabhängig von der speziellen Form der Ver-

teilungsdichte p die Polynome

$$\varphi_{0x}(u) = 1 \quad \varphi_{1x}(u) = \frac{u - m_x}{\sigma_x} \quad (3.5)$$

(entsprechend für y) die geforderte Orthonormalitätseigenschaft (3.2) besitzen. Damit folgt sofort

$$\begin{aligned} a_{m,0} &= \iint \varphi_{m,x}(u) \cdot 1 \cdot p_{xy}(u,v) \, du \, dv \\ &= \int \varphi_{m,x}(u) \left[\int p_{xy}(u,v) \, dv \right] du \\ &= \int \varphi_{m,x}(u) \, p_x(u) \, du = \int \varphi_{m,x}(u) \cdot \varphi_{0x}(u) \, p_x(u) \, du \end{aligned}$$

Also gilt

$$a_{m,0} = a_{0,n} = 0 \text{ für } m = 0, n = 0 \quad (3.6a)$$

$$a_{0,0} = 1. \quad (3.6b)$$

Weiter folgt

$$a_{1,1} = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} =: \rho_{xy}. \quad (3.6c)$$

$a_{1,1}$ ist somit gleich dem Korrelationskoeffizienten von x und y . Infolgedessen ist $a_{1,1}$ betragsmäßig höchstens gleich Eins. Diese Aussage kann auch auf die anderen Koeffizienten ausgedehnt werden. Der Beweis wird in [11] für eine speziellere Klasse von Dichtefunktionen durchgeführt, kann aber auf den hier vorliegenden Fall direkt übertragen werden:

Mit einer reellen Konstanten k wird der Ausdruck

$$\mathbb{E} \{ [\varphi_{m,x}(x) + k \varphi_{n,y}(y)]^2 \}$$

betrachtet. Durch Quadrieren und anschließende Erwartungswertbildung der Summanden folgt mit (3.2a) bis (3.4a) sofort

$$\mathbb{E} \{ [\dots] \} = 1 + 2 a_{m,n} k + k^2.$$

Die linke Seite ist definitionsgemäß nie negativ. Damit die rechte Seite diese Eigenschaft ebenfalls für alle k besitzt, muß gelten

$$|a_{m,n}| \leq 1 \text{ für alle } m,n. \quad (3.7)$$

Handelt es sich bei der hier betrachteten zweidimensionalen Dichtefunktion um die Verbunddichte eines ergodischen und damit stationären Prozesses $x(t)$:

$$p_{xy}(u,v) = p_x(t), \, x(t+\tau) \, (u,v),$$

so nimmt die Entwicklung (3.1) folgende Form an

$$p_{x(t), x(t+\tau)}(u, v) = p_x(u) p_x(v) \cdot \sum_m \sum_n a_{m,n}(\tau) \varphi_{m,x}(u) \varphi_{n,x}(v) \quad (3.8)$$

Die eindimensionalen Dichten sind wegen der Stationarität unabhängig von t und stimmen in ihrer analytischen Form daher überein, was insbesondere zur Folge hat, daß nur ein Typ von Orthonormalfunktionen in die Entwicklung eingeht. Die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen von τ . Der Koeffizient $a_{1,1}(\tau)$ stimmt in diesem Fall mit der normierten Kovarianzfunktion des Prozesses $x(t)$ überein:

$$a_{1,1}(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} =: \rho_{xx}(\tau) \quad (3.9)$$

Wegen der vorausgesetzten Ergodizität können die Koeffizienten auch durch eine Zeitmittelung bestimmt werden:

$$a_{m,n}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi_m(x(t)) \varphi_n(x(t+\tau)) dt$$

Hieraus erhält man sofort die Aussage:

$$a_{m,n}(\tau) = a_{n,m}(-\tau)$$

Es gilt ferner wegen der Orthonormalität der Polynome $\varphi_n(x)$:

$$a_{m,n}(0) = \delta_{m,n}$$

Die Verbundverteilungsdichte $p_{x(t), x(t+\tau)}(u, v)$ wird somit unter den eingangs getroffenen Voraussetzungen durch die eindimensionale Dichte $p_x(u)$ und das Koeffizientenschema

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \rho_{xx}(\tau) & a_{2,1}(\tau) & a_{3,1}(\tau) & & & \\ 0 & a_{2,1}(-\tau) & a_{22}(\tau) & a_{32}(\tau) & & & \\ 0 & a_{3,1}(-\tau) & a_{32}(-\tau) & a_{33}(\tau) & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \quad (3.10)$$

bestimmt.

Eine erhebliche Vereinfachung von (3.1) bzw. (3.8) ergibt sich, wenn die Koeffizienten die Eigenschaft

$$a_{m,n} = 0 \quad \text{für } n \neq m \quad (3.11)$$

erfüllen, das Koeffizientenschema (3.10) sich also auf ein reines Diagonalschema reduziert. Nach (3.4a) bedeutet diese Aussage, daß die durch $\varphi_{m,x}(x)$ und $\varphi_{n,y}(y)$ definierten Zufallsvariablen für $m \neq n$ zueinander orthogonal sein sollen. Damit ergibt sich für $p_{xy}(u, v)$ die Darstellung [11]:

$$p_{xy}(u,v) = p_x(u)p_y(v) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,n} \varphi_{n,x}(u) \cdot \varphi_{n,y}(v) \quad (3.12)$$

Obwohl die Forderung (3.11) an die Koeffizienten sehr einschneidend zu sein scheint, besitzen einige sehr bedeutende Dichten eine Entwicklung in "Diagonalform".

An erster Stelle muß hier die GAUSS-Verteilung genannt werden. Für die zweidimensionale Dichte gilt die bekannte Darstellung [11]:

$$p_{xy}(u,v)_{\text{GAUSS}} = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{v-m_y}{\sigma_y}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{xy}^n \frac{H_n\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)}{\sqrt{n!}} \frac{H_n\left(\frac{v-m_y}{\sigma_y}\right)}{\sqrt{n!}} \quad (3.13)$$

Das bezüglich der eindimensionalen Dichte orthogonale Funktionensystem wird hier wieder durch die HERMITESchen Polynome gegeben. Die Entwicklung (3.13) wird in der Literatur bisweilen als Verallgemeinerung der GRAM-CHARLIER-Reihe bezeichnet [14]. Diese Aussage ist jedoch nicht korrekt. Die obige Entwicklung gibt ein Maß für die Stärke der statistischen Abhängigkeit zweier GAUSSverteilter Variabler. Aus (3.13) folgt ja mit

$$(3.6b) \quad \frac{p_{xy}(u,v) - p_x(u)p_y(v)}{p_x(u)p_y(v)} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{xy}^n \frac{H_n(\cdot)}{\sqrt{n!}} \frac{H_n(\cdot)}{\sqrt{n!}}.$$

GRAM-CHARLIER-Entwicklungen gelten dagegen für die Dichtefunktionen nicht-GAUSS-verteilter Variabler und geben ein Maß für die Abweichung von der GAUSSschen Dichte. Mehrdimensionale GRAM-CHARLIER-Reihen findet man in [15].

Ein weiteres Beispiel gibt die Verbunddichte eines Prozesses $x(t)$, der durch ein harmonisches Signal mit einer in $[-\pi, \pi]$ gleichverteilten Phase φ gebildet wird:

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty.$$

Die eindimensionale Dichtefunktion dieses Prozesses lautet bekanntlich

$$p_x(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{x_0^2 - u^2}} & \text{für } |u| \leq x_0 \\ 0 & \text{für } |u| > x_0 \end{cases}$$

Die bezüglich $p_x(u)$ orthogonalen Polynome sind die durch

$$T_n\left(\frac{u}{x_0}\right) := \cos\left(n \cdot \arccos \frac{u}{x_0}\right)$$

definierten TSCHEBYSCHEFFschen Polynome erster Art. Das benötigte orthonormale Funktionensystem lautet dann

$$\varphi_n(u) = \begin{cases} \sqrt{2} \cdot T_n\left(\frac{u}{x_0}\right) & \text{für } n \geq 1 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}; \quad (3.14a)$$

Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich zu

$$a_{n,n}(\tau) = \cos n\omega\tau. \quad (3.14b)$$

Dabei ist bereits benutzt, daß $x(t)$ wegen der Gleichverteilung der Phase ein stationärer Prozeß ist [7].

Ein letztes Beispiel sei schließlich im Zusammenhang mit der Einhüllenden $r(t)$ eines GAUSS-schen Schmalbandgeräusches

$$x(t) = r(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

erwähnt, wo die Phase φ in $[-\pi, \pi]$ gleichverteilt ist und $r(t)$ eine RAYLEIGH - Verteilung besitzt. Für den quadrierten Prozeß $r^2(t)$ kann eine Verbunddichte der Form (3.12) angegeben werden. Die eindimensionale Dichte von $r^2(t)$ leitet sich aus der RAYLEIGH-Dichte ab zu

$$p_{r^2}(u) = \frac{1}{2\sigma_r^2} e^{-\frac{u}{2\sigma_r^2}}.$$

Die zugehörigen orthogonalen Funktionen sind die LAGUERRESchen Polynome $L_n\left(\frac{u}{2\sigma_r^2}\right)$.

Durch die Nennung der Beispiele ist damit die Frage, ob Verbundverteilungsdichten überhaupt eine Entwicklung der Form (3.12) besitzen, beantwortet. Die sich anschließende Frage, unter welchen Voraussetzungen an p_{xy} eine derartige Entwicklung existiert, muß dagegen offenbleiben. Es sind bisher keine Kriterien bekannt, die es erlauben, ausgehend von p_{xy} sofort auf die Existenz einer zugehörigen Entwicklung (3.12) zu schließen. Somit muß in jedem Einzelfall geprüft werden, ob die Bedingung (3.11) erfüllt ist.

3.2 BERECHNUNG ZWEIDIMENSIONALER ERWARTUNGSWERTE

Zwei Beziehungen, die im Verlauf dieser Arbeit noch mehrmals Anwendung finden werden, sollen ausgehend von der Entwicklung (3.12) hergeleitet werden, und zwar am Beispiel eines GAUSS-verteilten Prozesses $x(t)$.

Für $p_{x(t), x(t+\tau)}(u, v)$ gelte also die spezielle Reihendarstellung (3.13).

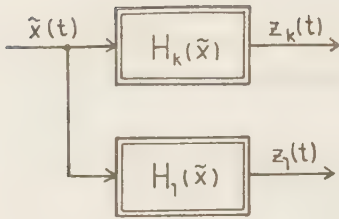


Bild 3.1a

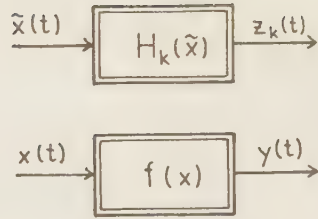


Bild 3.1b

Der zugehörige standardisierte Prozeß $\tilde{x}(t)$ mit $m_{\tilde{x}}=0$, $\sigma_{\tilde{x}}^2=1$ sei Eingangsprozeß zweier Nichtlinearitäten, deren Kennlinienfunktionen HERMITESche Polynome k -ten und l -ten Grades seien, Bild 3.1a. Für die Kreuzkorrelierte der Ausgangsprozesse folgt dann

$$\begin{aligned} \phi_{z_k z_l}(\tau) &:= \mathbb{E} \{ z_k(t) \cdot z_l(t+\tau) \} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} H_k\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) H_l\left(\frac{v-m_x}{\sigma_x}\right) p_x(t)x(t+\tau)(u,v) du dv \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von (3.13) und Vertauschung von Integration und Summation kann das Doppelintegral in das Produkt zweier einfacher Integrale separiert werden:

$$\begin{aligned} \phi_{z_k z_l}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_{xx}^n(\tau)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_k\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) H_n\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) p_x(u) du \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H_l\left(\frac{v-m_x}{\sigma_x}\right) H_n\left(\frac{v-m_x}{\sigma_x}\right) p_x(v) dv \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_{xx}^n(\tau)}{n!} \delta_{k,n} k! \cdot \delta_{l,n} l! \end{aligned}$$

wegen der Orthonormalitätsbedingung der HERMITE-Polynome. Damit lautet die gesuchte Beziehung:

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{H_k\left(\frac{x(t)-m_x}{\sigma_x}\right)}{\sqrt{k!}} \frac{H_l\left(\frac{x(t+\tau)-m_x}{\sigma_x}\right)}{\sqrt{l!}} \right\} = \begin{cases} \rho_{xx}^k(\tau) & \text{für } l = k \\ 0 & \text{für } l \neq k \end{cases} \quad (3.15)$$

Durch die Herleitung von (3.15) ist somit nachträglich der Beweis erbracht, daß für eine Reihenentwicklung der GAUSSschen Dichte in der Form

(3.13) tatsächlich $a_{n,m} = 0$ für $n \neq m$ ist.

Eine weitere benötigte Aussage ergibt sich durch die Berechnung der Korrelationsfunktion $\phi_{y,z_k}(\tau)$ nach Bild 3.1b, wo $f(x)$ eine beliebige gedächtnisfreie Nichtlinearität sei. Es wird

$$\begin{aligned}\phi_{y,z_k}(\tau) &= \mathbb{E}\{y(t) \cdot z_k(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot H_k\left(\frac{v-m_x}{\sigma_x}\right) \cdot p_{x(t),x(t+\tau)}(u,v) du dv.\end{aligned}$$

Verfährt man wieder wie in der vorigen Herleitung, so ergibt sich hier

$$\begin{aligned}\phi_{y,z_k}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{yy}^n(\tau)}{n!} \mathbb{E}\{f[x(t)] H_n\left[\frac{x(t+\tau)-m_x}{\sigma_x}\right]\} \mathbb{E}\left\{H_k\left[\frac{x(t+\tau)-m_x}{\sigma_x}\right] H_n\left[\frac{x(t+\tau)-m_x}{\sigma_x}\right]\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{yy}^n(\tau)}{n!} \mathbb{E}\{f(x) H_n\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\} \cdot \delta_{k,n} k!\end{aligned}$$

Demzufolge gilt

$$\mathbb{E}\left\{f[x(t)] H_k\left[\frac{x(t+\tau)-m_x}{\sigma_x}\right]\right\} = g_{xx}^k(\tau) \cdot \mathbb{E}\left\{f(x) H_k\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\right\} \quad (3.16)$$

Beinhaltet der linke Erwartungswert zwei verschiedene Zeitargumente t und $t+\tau$, so enthält der verbleibende Erwartungswert der rechten Seite nur noch ein einziges Zeitargument. Die τ -Abhängigkeit der Kreuzkorrelationsfunktion der Ausgangssignale spiegelt sich direkt in der Autokorrelation des Eingangssignales wieder.

Es ist aufgrund der Herleitung unmittelbar klar, daß die Beziehungen (3.15) und (3.16) allgemeiner für Prozesse, die eine Reihenentwicklung der Verbunddichte nach (3.12) erlauben, formuliert werden können. Dazu müssen die HERMITESchen Kennlinien nur durch die Polynomkennlinien $\varphi_n(x)$ ersetzt werden. Man erhält dann:

$$\mathbb{E}\{\varphi_k(x(t)) \cdot \varphi_l(x(t+\tau))\} = a_{k,l}(\tau) \cdot \delta_{k,l} \quad (3.15a)$$

$$\mathbb{E}\{f(x(t)) \cdot \varphi_k(x(t+\tau))\} = a_{k,k}(\tau) \cdot \mathbb{E}\{f(x) \cdot \varphi_k(x)\} \quad (3.16a)$$

Die Möglichkeiten, die sich mit diesen Beziehungen bieten, sollen an einem Beispiel demonstriert werden.

Gesucht wird die Momentfunktion

$$\phi_{x^3 x^3}(\tau) := \mathbb{E}\{x^3(t) \cdot x^3(t+\tau)\}$$

eines GAUSSverteilten Prozesses $x(t)$. Durch eine identische Umformung folgt ausgehend von $x^3 \equiv [(x-m_x)+m_x]^3$:

$$\begin{aligned} x^3 &= \sigma_x^3 \tilde{x}^3 + 3m_x \sigma_x^2 \tilde{x}^2 + 3m_x^2 \sigma_x \tilde{x} + m_x^3 \\ &= \sigma_x^3 H_3(\tilde{x}) + 3m_x \sigma_x^2 H_2(\tilde{x}) + (3\sigma_x^3 + 3m_x^2 \sigma_x) H_1(\tilde{x}) + (m_x^3 + 3m_x \sigma_x^2) H_0(\tilde{x}) \end{aligned}$$

mit der Abkürzung $\tilde{x} := \frac{x - m_x}{\sigma_x}$ und den HERMITESchen Polynomen H_0 bis H_3 . Diese Identität gilt sowohl für $x(t)$ wie auch für $x(t+\tau)$. Wird nun nach der Produktbildung $x(t)x(t+\tau)$ der Erwartungswert auf die einzelnen Summanden angewendet, was wegen der Linearität ja erlaubt ist, so erhält man mit Hilfe der Beziehung (3.15) sofort das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \phi_{x^3 x^3}(\tau) &= 6\sigma_x^6 \rho_{xx}^3(\tau) + 18m_x^2 \sigma_x^4 \rho_{xx}^2(\tau) + 9(\sigma_x^3 + m_x^2 \sigma_x)^2 \rho_{xx}(\tau) + \\ &\quad + (m_x^3 + 3m_x \sigma_x^2)^2 \end{aligned}$$

Für $\tau=0$ folgt als Spezialfall das Moment $m_6 = \mathbb{E}\{x^6\}$ zu

$$\mathbb{E}\{x^6\} = 15\sigma_x^6 + 45m_x^2 \sigma_x^4 + 15\sigma_x^2 m_x^4 + m_x^6$$

Eine Verallgemeinerung auf Momentfunktionen $\phi_{x^k x^l}(\tau)$ ist leicht möglich, soll hier aber unterbleiben.

3.3 ZUR KONSTRUKTION DER ORTHONORMALEN POLYNOME

In den vorangegangenen Beispielen konnte aufgrund der jeweiligen Form der eindimensionalen Dichte sofort das zugehörige orthonormale Funktionensystem angegeben werden. Dies war möglich, da es sich um in der mathematischen Anwendung weit verbreitete und daher wohlbekannte Funktionensysteme handelte. Eine derartige Situation wird aber nur in wenigen Fällen vorliegen, so daß eine konstruktive Bestimmung eines orthonormalen Systems notwendig ist. Diese kann mit dem bekannten "GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahren" durchgeführt werden, indem man von einem beliebigen linear unabhängigen Funktionensystem ausgehend sukzessive ein Orthonormalsystem konstruiert. Auf dieses Konstruktionsverfahren kann auch die von LUBBOCK [16] angegebene Darstellung eines Orthonormalsystems zurückgeführt werden, wenn als linear unabhängiges Basissystem die Monome u^k , $k = 0, 1, 2, \dots$ benutzt werden.

Da sowohl bei der in diesem Abschnitt betrachteten Reihenentwicklung von Verbundverteilungen wie auch an späterer Stelle bei der Bestimmung von nichtlinearen Ersatzsystemen den orthonormalen Funktionen große

Bedeutung zukommt, soll die Herleitung der hier benötigten Entwicklungsfunktionen kurz dargestellt werden. Zuvor sei noch eine Bemerkung zu der im folgenden benutzten Schreibweise gemacht. Es ist unmittelbar zu sehen, daß der durch (3.2) gegebene Orthogonalitätsbegriff für die Funktionen $\varphi_m(u)$ und $\varphi_n(u)$ äquivalent zu der Orthogonalität der durch $\varphi_m(x)$ und $\varphi_n(x)$ definierten Zufallsvariablen ist, was bereits in (3.2a) zum Ausdruck gebracht wurde. Für die Benutzung des Erwartungswertes sprechen die einfacheren und übersichtlicheren Darstellungsmöglichkeiten. Daher wird im folgenden angenommen, daß die unabhängige Variable der betrachteten Funktionen eine Zufallsvariable sei. Diese Annahme besitzt keinerlei Auswirkungen auf die Bestimmung der Orthonormalsysteme.

Für eine vorgegebene Verteilungsdichte $p_x(u)$ wird nun ein System von Funktionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ gesucht, das die Orthonormalitätsrelation (3.2a) (bzw. (3.2)) erfüllt. Unter der Annahme, daß $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ bereits paarweise orthonormal seien, wird für φ_n der Ansatz

$$\varphi_n(x) = \alpha_{n,n} \left[x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n,i} \varphi_i(x) \right] \quad (3.17)$$

gemacht. Die Koeffizienten $\alpha_{n,i}$ werden dann so bestimmt, daß $E\{\varphi_n(x)\varphi_k(x)\} = 0$ für $k=0,1,\dots,n-1$ und $E\{\varphi_n^2(x)\} = 1$ erfüllt wird.

Man erhält auf diese Weise

$$\alpha_{n,k} = E\{x^n \varphi_k(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u^n \varphi_k(u) p_x(u) du \quad (3.18a)$$

$$\text{und} \quad \alpha_{n,n} = [E\{x^{2n}\} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n,i}^2]^{-1/2} \quad (3.18b)$$

Für den konkreten Fall ergeben sich etwas einfachere Ausdrücke, wenn nicht x sondern die standardisierte Variable $\tilde{x} = \frac{x-m_x}{\sigma_x}$ und damit das ebenfalls linear unabhängige System $1, \tilde{x}, \tilde{x}^2, \dots$ zugrunde gelegt wird. Die daraus abgeleiteten Orthonormalfunktionen seien dann mit $\psi_0(\tilde{x}), \psi_1(\tilde{x}), \dots$ bezeichnet. Da die Orthonormalfunktionen bezüglich einer vorgegebenen Belegungsfunktion eindeutig sind, gilt

$$\psi_k(\tilde{x}) = \varphi_k(x) \quad \text{für } k=0,1,\dots$$

Im einzelnen ergibt sich wegen $E\{1 \cdot 1\} = 1$ sofort

$$\psi_0(\tilde{x}) = \varphi_0(x) = 1 \quad (3.19a)$$

Mit dem Ansatz $\psi_1(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_{1,1} \tilde{x} + \tilde{\alpha}_{1,0} \psi_0(\tilde{x})$ folgt aus $E\{\psi_1(\tilde{x})\psi_0(\tilde{x})\} = 0$:

$$\tilde{\alpha}_{1,1} E\{\tilde{x} \psi_0(\tilde{x})\} + \tilde{\alpha}_{1,0} = 0,$$

also erhält man wegen (3.19a) und $\mathbb{E}\{\tilde{x}\} = 0$ sofort $\tilde{\alpha}_{1,0} = 0$ und daher

$$\psi_1(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_{1,1} \cdot \tilde{x}$$

$\tilde{\alpha}_{1,1}$ folgt aus der Normierung $\mathbb{E}\{\psi_1(\tilde{x}) \cdot \psi_1(\tilde{x})\} = 1$ wegen $\mathbb{E}\{\tilde{x}^2\} = 1$

zu $\tilde{\alpha}_{1,1} = 1$. Somit gilt

$$\psi_1(\tilde{x}) = \varphi_1(x) = \frac{x - m_x}{\sigma_x} \quad (3.19b).$$

Für $\psi_2(\tilde{x})$ bekommt man für den Ansatz

$$\psi_2(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_{2,2} \tilde{x}^2 + \tilde{\alpha}_{2,1} \cdot \psi_1(\tilde{x}) + \tilde{\alpha}_{2,0} \cdot \psi_0(\tilde{x})$$

zunächst

$$\tilde{\alpha}_{2,1} = -\tilde{\alpha}_{2,2} \cdot \mathbb{E}\{\tilde{x}^2 \psi_1(\tilde{x})\} = -\tilde{\alpha}_{2,2} \cdot \mathbb{E}\{\tilde{x}^3\}$$

und

$$\tilde{\alpha}_{2,0} = -\tilde{\alpha}_{2,2} \cdot \mathbb{E}\{\tilde{x}^2 \psi_0(\tilde{x})\} = -\tilde{\alpha}_{2,2} \cdot \mathbb{E}\{\tilde{x}^2\},$$

also wird

$$\psi_2(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_{2,2} [\tilde{x}^2 - \mathbb{E}\{\tilde{x}^3\} \psi_1(\tilde{x}) - \mathbb{E}\{\tilde{x}^2\} \psi_0(\tilde{x})].$$

Hieraus folgt

$$1 = \tilde{\alpha}_{2,2} \mathbb{E}\{\tilde{x}^2 \cdot \psi_2(\tilde{x})\}$$

bzw.

$$\mathbb{E}\{\psi_2(\tilde{x}) \tilde{x}^2\} = \tilde{\alpha}_{2,2} [\mathbb{E}\{\tilde{x}^4\} - \mathbb{E}^2\{\tilde{x}^3\} - \mathbb{E}^2\{\tilde{x}^2\}].$$

Damit ergibt sich für das zweite Orthonormalpolynom mit $\mathbb{E}\{\tilde{x}^2\} = 1$ der Ausdruck

$$\psi_2(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}^2 - \mathbb{E}\{\tilde{x}^3\} \cdot \tilde{x} - 1}{\sqrt{\mathbb{E}\{\tilde{x}^4\} - \mathbb{E}^2\{\tilde{x}^3\} - 1}} \quad (3.19c)$$

Wegen $\mathbb{E}\{\tilde{x}^k\} = \frac{\mathbb{E}\{(x - m_x)^k\}}{\sigma_x^k}$ ist der Einfluß der Zentralmomente der Verteilungsdichte $p_x(u)$ unmittelbar zu erkennen. Mit wachsender Ordnung erhält man sehr schnell umfangreiche und entsprechend unhandliche Ausdrücke. Eine wesentliche Vereinfachung der Ausdrücke wird durch eine Symmetrieforderung an die Dichtefunktion $p_x(u)$ bewirkt.

Gilt

$$p_x(u - m_x) = p_x(m_x - u), \quad (3.20a)$$

ist $p_x(u)$ also bezüglich $u = m_x$ eine gerade Funktion, so verschwinden alle Zentralmomente ungerader Ordnung und es ist

$$\mathbb{E}\{\tilde{x}^{2k+1}\} = 0 \quad \text{für } k=0,1,2,\dots$$

$\psi_2(\tilde{x})$ wird dann eine gerade Funktion. Diese Aussage kann leicht auf beliebiges n ausgedehnt werden. Es gilt nämlich unter der Voraussetzung

(3.20a):

$$\psi_n(-\tilde{x}) = (-1)^n \psi_n(\tilde{x}) \quad (3.20b)$$

Für die zur Herleitung der Polynome $\psi_n(\tilde{x})$ benötigten Ausdrücke

$\tilde{\alpha}_{n,k} - \mathbb{E}\{\tilde{x}^n \psi_k(\tilde{x})\}$ hat das zur Folge, daß $\tilde{\alpha}_{n,k} = 0$ ist, wenn $k+n$ ungerade,

also entweder n oder aber k ungerade ist. Auf den durch vollständige Induktion zu führenden Beweis sei hier verzichtet.

Gleichwertig mit (3.20b) ist die Feststellung, daß Polynome φ_n mit gerader Ordnung nur gerade Potenzen von x, die ungerader Ordnung auch nur ungerade Potenzen von x enthalten.

Die entsprechenden Aussagen gelten auch für $\varphi_n(x)$, wenn $m_x=0$ ist.

Mit der vereinfachenden Annahme (3.20a) erhält man folgende Ausdrücke für $\psi_3(\tilde{x})$ bis $\psi_5(\tilde{x})$:

$$\psi_3(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}^3 - \epsilon\{\tilde{x}^4\}\tilde{x}}{\|\psi_3\|} \quad \text{mit} \quad \|\psi_3\|^2 = \epsilon\{\tilde{x}^6\} - \epsilon^2\{\tilde{x}^4\} \quad (3.21a)$$

$$\psi_4(\tilde{x}) = \frac{1}{\|\psi_4\|} \cdot \left[\tilde{x}^4 - \frac{\epsilon\{\tilde{x}^6\} - \epsilon\{\tilde{x}^4\}}{\|\psi_2\|^2} \tilde{x}^2 + \frac{\epsilon\{\tilde{x}^6\} - \epsilon^2\{\tilde{x}^4\}}{\|\psi_2\|^2} \right] \quad (3.21b)$$

$$\text{mit } \|\psi_4\|^2 = \epsilon\{\tilde{x}^8\} - \frac{[\epsilon\{\tilde{x}^6\} - \epsilon\{\tilde{x}^4\}]^2}{\|\psi_2\|^2} - \epsilon^2\{\tilde{x}^4\},$$

$$\|\psi_2\|^2 = \epsilon\{\tilde{x}^4\} - 1,$$

$$\psi_5(\tilde{x}) = \frac{1}{\|\psi_5\|} \cdot \left[\tilde{x}^5 - \frac{\epsilon\{\tilde{x}^8\} - \epsilon\{\tilde{x}^6\}\epsilon\{\tilde{x}^4\}}{\|\psi_3\|^2} \tilde{x}^3 + \frac{\epsilon\{\tilde{x}^8\}\epsilon\{\tilde{x}^4\} - \epsilon^2\{\tilde{x}^6\}}{\|\psi_3\|^2} \tilde{x} \right]$$

$$\text{mit } \|\psi_5\|^2 = \epsilon\{\tilde{x}^{10}\} - \frac{[\epsilon\{\tilde{x}^8\} - \epsilon\{\tilde{x}^6\} \cdot \epsilon\{\tilde{x}^4\}]^2}{\|\psi_3\|^2} - \epsilon^2\{\tilde{x}^6\}. \quad (3.21c)$$

Für eine GAUSS-Verteilung ergeben sich hieraus wegen

$\epsilon\{\tilde{x}^{2k}\} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ für $k=1,2,\dots$ sofort die normierten HERMITE-Polynome:

$$\psi_n(\tilde{x}) \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(\tilde{x}).$$

Die in den Beziehungen (3.21a) bis (3.21c) abzulesende Abhängigkeit der Polynomkoeffizienten von den Zentralmomenten μ_k bzw. Momenten m_k kann deutlicher durch eine Determinantendarstellung der Orthogonalpolynome ausgedrückt werden. Für deren Herleitung wird das n-te Orthonormalpolynom $\varphi_n(x)$ in der Form

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} x^k \quad (3.22)$$

angenommen. Berücksichtigt man nun, daß die Orthogonalität von $\varphi_n(x)$ und $\varphi_m(x)$ die Gültigkeit von $\epsilon\{\varphi_n(x) \cdot x^i\} = 0$ für $i=0,1,\dots,m$, $m < n$, zur Folge hat, - x^m kann ja als Linearkombination von Polynomen bis zum Grad m dargestellt werden -, so gilt mit den Momenten $m_k := \epsilon\{x^k\}$:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} m_{k+i} = 0 \text{ für } i=0,1,\dots,n-1. \quad (3.23)$$

Durch (3.22) und (3.23) wird ein System von $n+1$ Gleichungen für die $n+1$ unbekannten Koeffizienten $\alpha_0^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$ gegeben. Die Anwendung der KRAMERSchen Regel für eine der Größen $\alpha_k^{(n)}$ führt nun sofort zu der gesuchten Darstellung. Für $\alpha_n^{(n)}$ ergibt sich beispielsweise mit der Systemdeterminanten

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^n \\ m_0 & m_1 & m_2 & m_n \\ m_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n-1} & & & m_{2n-1} \end{vmatrix}$$

die Beziehung

$$\alpha_n^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{D} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \dots x^{n-1} & \psi_n(x) \\ m_0 & m_1 & m_2 & m_{n-1} & 0 \\ m_1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n-1} & & & m_{2n-2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch Entwickeln nach der letzten Spalte folgt dann

$$\psi_n(x) = \frac{\alpha_n^{(n)}}{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n-1} & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \dots x^n \\ m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n-1} & \dots & & m_{2n-1} \end{vmatrix}. \quad (3.24)$$

Die Nennerdeterminante kann als Spezialfall einer GRAMschen Determinante gedeutet werden und ist daher stets positiv. Die Darstellung (3.24) ist besonders dann nützlich, wenn keine Normierung der Polynome notwendig ist. Eine Standardisierung erfolgt zweckmäßig durch die Festlegung $\alpha_n^{(n)} = 1$.

Schließlich muß noch ein in der Literatur in verschiedenen Variationen anzutreffendes Verfahren erwähnt werden, mit dessen Hilfe ebenfalls ein Orthogonalsystem für eine beliebige vorgegebene Dichtefunktion bestimmt werden kann [17]. Es gilt die Darstellung

$$\varphi_n(x) = A_n \left[x \varphi_{n-1}(x) - B_{n,n-1} \varphi_{n-1}(x) - B_{n,n-2} \varphi_{n-2}(x) \right] \quad (3.25)$$

mit $B_{n,i} = \mathcal{E}\{x \varphi_{n-1}(x) \cdot \varphi_i(x)\}$ für $i=n-1, n-2$

$$A_n = \left[\mathcal{E}\{x^2 \cdot \varphi_{n-1}^2(x)\} - B_{n,n-1}^2 - B_{n,n-2}^2 \right]^{-1/2}$$

Im Falle einer geraden Dichtefunktion $p_X(u)=p_X(-u)$ ist $B_{n,n-1} \equiv 0$ für alle n .

Während diese Rekursionsformel zur Bestimmung von $\varphi_n(x)$ nur die beiden vorhergehenden Polynome $\varphi_{n-1}(x)$ und $\varphi_{n-2}(x)$ benötigt, erfordert der Algorithmus (3.17) die momentane Kenntnis aller zurückliegenden Polynome $\varphi_{n-1}(x), \dots, \varphi_1(x), \varphi_0$.

4 DIE APPROXIMATION IM QUADRATISCHEN MITTEL VON ZUFALLSVARIABLEN

4.1 DIE PROBLEMSTELLUNG FÜR STATISTISCH ABHÄNGIGE ZUFALLSVARIABLE

Es seien x und y zwei statistisch voneinander abhängige Zufallsvariable. Der durch die Verbundverteilung $p_{xy}(u,v)$ gegebene statistische Zusammenhang soll durch eine gegenseitige funktionale Abhängigkeit der beiden Variablen ersetzt werden. Dies wird im allgemeinen nur näherungsweise möglich sein. Es wird daher eine Funktion $g(x)$ gesucht, so daß die Zufallsvariablen y und $g(x)$ sich möglichst wenig voneinander unterscheiden. Aufgrund der aus der TSCHEBYSCHEFFSchen Ungleichung [7] folgenden Beziehung

$$W \{ |y - g(x)| > \varepsilon \} \leq \frac{E \{ [y - g(x)]^2 \}}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \text{ beliebig positiv}$$

wird ein Maß für die Abweichung der beiden Zufallsvariablen y und $g(x)$ durch den quadratischen Mittelwert ihrer Differenz geliefert. Für die zu bestimmende optimale Funktion $\bar{y} := g_0(x)$ soll dann gelten:

$$E \{ [y - g_0(x)]^2 \} \leq E \{ [y - g(x)]^2 \} \quad (4.1)$$

für alle Funktionen $g(x)$.

Hinweise für die Lösung dieses Problems erhält man aus der Funktionalanalysis, mit der das hier betrachtete Problem durch die folgende Eigenschaft von Zufallsvariablen verknüpft ist:

Die Gesamtheit aller über einer gemeinsamen Menge von Elementarereignissen definierten Zufallsvariablen mit endlichem quadratischen Mittelwert bilden einen "Hilbertraum" L_2 , dessen inneres Produkt durch das Verbundmoment der Zufallsvariablen x_1 und x_2 gegeben ist:

$$(x_1, x_2) := E \{ x_1 x_2 \}.$$

Die Erwartungswertbildung ist hier als LEBESGUE-Integration zu verstehen. Insbesondere wird durch das innere Produkt eine Norm und somit ein Abstandsmaß definiert

$$\|x_1 - x_2\| := E \{ (x_1 - x_2)^2 \}^{1/2}.$$

Aufgrund dieser Aussage ist es möglich, die Ergebnisse und Methoden einer für allgemeine Hilberträume entwickelten Approximationstheorie unmittelbar auf das hier vorliegende Problem zu übertragen. So können beispielsweise Existenz-, Eindeutigkeits- und Charakterisierungsfragen

sofort beantwortet werden.

In dieser Arbeit wird auf die Übertragung der funktionalanalytischen Ergebnisse verzichtet und eine ausführlichere Darstellung gewählt. Dies sei damit begründet, daß dem Ingenieur die allgemeine Theorie üblicherweise nicht geläufig ist und diese zudem in den späteren Abschnitten nicht mehr benötigt wird.

4.2 DIE "ABSOLUT BESTE APPROXIMATION"

Es ist zu erwarten, daß die Bestimmung einer (4.1) erfüllenden Funktion $g_0(x)$ es erfordert, den Funktionentyp, dem die "beste Approximation" $g_0(x)$ angehören soll, zuvor festzulegen. Eine Besonderheit der hier vorliegenden Approximation von Zufallsvariablen ist das Bestehen einer absolut besten Approximation [7],[18].

Satz: 4.1 Unter allen möglichen Funktionen $g(x)$ ist der bedingte Erwartungswert

$$g_0(x) = \mathbb{E}\{y|x\} \quad (4.2)$$

die absolut beste Approximation im quadratischen Mittel von y . Die durch (4.2) gegebene Zufallsvariable $\bar{y}$ nimmt für $x = u$ den Wert

$$g_0(u) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v p_{xy}(u,v) dv}{p_x(u)} \quad (4.3)$$

an.

Diese Aussage ist zu einem grundlegenden Satz der sog. Schätzwerttheorie geworden und hat dort zahlreiche Erweiterungen bekommen, so etwa auf stochastische Prozesse oder auch auf nicht-quadratische Kostenfunktionale [19]. Der Beweis von Satz 4.1 wird in der Literatur üblicherweise mit Hilfsaussagen über bedingte Erwartungswerte geführt [18],[19], die in der dort angegebenen Allgemeinheit nicht erforderlich sind.

Zum Beweis wird der Approximationsfehler geeignet umgeformt, so daß die Gültigkeit von (4.1) gezeigt werden kann. Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{[y-\bar{y}]^2\} &= \mathbb{E}\{[y-g(x) + g(x)-\bar{y}]^2\} \\ &= \mathbb{E}\{[y-g(x)]^2\} + \mathbb{E}\{[g(x)-\bar{y}]^2\} + \\ &\quad + 2 [\mathbb{E}\{yg(x)\} + \mathbb{E}\{\bar{y}g(x)\} - \mathbb{E}\{y\bar{y}\} - \mathbb{E}\{g^2(x)\}] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen} \quad \mathbb{E}\{y g(x)\} &= \iint v g(u) \frac{p_{xy}(u,v)}{p_x(u)} \cdot p_x(u) du dv \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{y|x\} \cdot g(x)\} = \mathbb{E}\{\bar{y} g(x)\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \mathbb{E}\{y \bar{y}\} &= \iint v \mathbb{E}\{y|x=u\} \frac{p_{xy}(u,v)}{p_x(u)} \cdot p_x(u) du dv \\ &= \int \mathbb{E}^2\{y|x=u\} p_x(u) du = \mathbb{E}\{\bar{y}^2\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

folgt nach der Zusammenfassung des gemischtquadratischen Gliedes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(y-\bar{y})^2\} &= \mathbb{E}\{[y-g(x)]^2\} + \mathbb{E}\{[g(x) - \bar{y}]^2\} - 2 \mathbb{E}\{[g(x) - \bar{y}]^2\} \\ &= \mathbb{E}\{[y-g(x)]^2\} - \mathbb{E}\{[g(x) - \bar{y}]^2\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da der quadratische Mittelwert stets nichtnegativ ist, ergibt sich hieraus sofort die für alle $g(x)$ gültige Abschätzung

$$\mathbb{E}\{[y-\bar{y}]^2\} \leq \mathbb{E}\{[y-g(x)]^2\},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $g(x) \equiv \bar{y}$ mit Wahrscheinlichkeit Eins ist.

Der bei Benutzung von $\bar{y}$ nach Glg (4.3) entstehende Approximationsfehler, die sog. Minimalabweichung, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Delta &:= \mathbb{E}\{[y-\bar{y}]^2\} = \mathbb{E}\{y^2\} - 2 \mathbb{E}\{y \bar{y}\} + \mathbb{E}\{\bar{y}^2\} \\ &= \mathbb{E}\{y^2\} - \mathbb{E}\{\bar{y}^2\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

wegen der Glg (4.5). Der absolut kleinstmögliche Fehler ist somit gleich der Differenz der quadratischen Mittelwerte von der zu approximierenden Variablen und der besten Approximation.

$\bar{y} = g_0(x)$ wurde als absolut beste Approximation von y hergeleitet. Es kann nun auch nach einer Approximationsfunktion gefragt werden, die einer vorgegebenen Klasse von Funktionen angehört. Eine solche Klasse kann beispielsweise durch die Menge aller Polynome $g_n(x)$ vom Grad n gegeben sein. Unter der Annahme, daß für y eine beste Approximation $\bar{y}_n$ als Funktion von x aus dieser mit V_n bezeichneten Klasse existiert, gilt dann

$$\mathbb{E}\{[y-\bar{y}_n]^2\} \geq \Delta,$$

denn anderenfalls wäre $\bar{y}$ nicht die absolut beste Näherung für y . Das Gleichheitszeichen gilt, wenn $\bar{y}$ selbst der Menge V_n angehört.

$\bar{y}_n$ soll gemäß der Definition die Bedingung

$$\mathbb{E}\{[y - \bar{y}_n]^2\} \leq \mathbb{E}\{[y - g_n(x)]^2\}$$

für alle $g_n(x)$ erfüllen. Wird auf beide Seiten dieser Ungleichung die sowohl für $g(x) \equiv g_n(x)$ wie auch für $g(x) \equiv \bar{y}_n$ geltende Beziehung (4.6) angewendet, so folgt

$$\mathbb{E}\{[y - \bar{y}]^2\} + \mathbb{E}\{[\bar{y} - \bar{y}_n]^2\} \leq \mathbb{E}\{[y - \bar{y}]^2\} + \mathbb{E}\{[\bar{y} - g_n(x)]^2\},$$

also

$$\mathbb{E}\{[\bar{y} - \bar{y}_n]^2\} \leq \mathbb{E}\{[\bar{y} - g_n(x)]^2\}.$$

Damit gilt der

Satz 4.2: Die beste Approximation $\bar{y}_n$ für y aus der Funktionenklasse V_n ist zugleich auch die beste Approximation für $\bar{y} = \mathbb{E}\{y|x\}$. Der dabei entstehende Approximationsfehler beträgt

$$\mathbb{E}\{[\bar{y} - \bar{y}_n]^2\} = \mathbb{E}\{[y - \bar{y}_n]^2\} - \mathbb{E}\{[y - \bar{y}]^2\} \quad (4.8)$$

Die Beziehung (4.8) entspricht der Glg (4.6), wenn dort $g(x)$ durch $\bar{y}_n$ ersetzt wird.

Dieser Satz wird vor allem in Fällen bedeutsam sein, wo die in Glg (4.3) durchzuführende Integration zur Ermittlung von $g_0(u)$ nicht mehr auf elementare Funktionen führt und infolgedessen eine Näherung für $\mathbb{E}\{y|x\}$ durchaus hilfreich sein kann.

4.3 DAS ORTHOGONALITÄTSPRINZIP UND EINE DAMIT ABGELEITETE APPROXIMATION FÜR y

Durch Umformung der Glg (4.4) erhält man die für alle Funktionen $g(x)$ gültige Beziehung

$$\mathbb{E}\{(y - \bar{y}) g(x)\} = 0.$$

Die Differenz aus zu approximierender Zufallsvariabler und absolut bester Approximation ist somit zu allen möglichen Funktionen $g(x)$ orthogonal.

Diese charakterisierende Eigenschaft von $\bar{y} = \mathbb{E}\{y|x\}$ kann auch auf den Fall übertragen werden, daß $g(x)$ aus einer speziellen Funktionenklasse V stammt. Es werde vorausgesetzt, daß Linearkombinationen von beliebigen Zufallsvariablen aus V wieder V angehören. y sei nicht in V enthalten. Dann gilt die folgende als Orthogonalitätsprinzip bezeichnete Aussage:

Satz 4.3: Die Zufallsvariable $\hat{g}_0(x) \in V$ ist genau dann beste Approximation von y :

$$\mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0(x)]^2\} = \inf_{g(x) \in V} \mathbb{E}\{[y - g(x)]^2\}, \quad (4.9)$$

wenn für alle $g(x)$ aus V die Orthogonalitätsbedingung

$$\mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0(x)] \cdot g(x)\} = 0 \quad (4.10)$$

erfüllt ist.

Der Beweis dieses Satzes kann der einschlägigen Literatur entnommen werden [20].

Aus der Bedingung (4.10) ergibt sich sofort die Eindeutigkeit von $\hat{g}_0(x)$. Seien $\hat{g}_0^{(1)}(x)$ und $\hat{g}_0^{(2)}(x)$ zwei die Beziehung (4.9) erfüllende Approximationen, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0^{(2)}(x)]^2\} &= \mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0^{(1)}(x)]^2\} + 2 \mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0^{(1)}(x)][\hat{g}_0^{(1)}(x) - \hat{g}_0^{(2)}(x)]\} \\ &\quad + \mathbb{E}\{[\hat{g}_0^{(1)}(x) - \hat{g}_0^{(2)}(x)]^2\} \end{aligned}$$

Wegen $\hat{g}_0^{(1)}(x) - \hat{g}_0^{(2)}(x) \in V$ verschwindet der mittlere Term.

Also wird

$$\mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0^{(2)}(x)]^2\} > \mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0^{(1)}(x)]^2\}$$

im Widerspruch, daß $\hat{g}_0^{(2)}(x)$ ebenfalls (4.9) erfüllen soll. Es muß somit $\mathbb{E}\{[\hat{g}_0^{(1)}(x) - \hat{g}_0^{(2)}(x)]^2\} = 0$, d.h. $\hat{g}_0^{(1)}(x) \equiv \hat{g}_0^{(2)}(x)$ mit Wahrscheinlichkeit Eins gelten.

Die Existenz einer besten Approximation ist immer dann gegeben, wenn V folgende Konvergenzeigenschaft besitzt: die Grenzwerte aller möglichen, im quadratischen Mittel konvergenten Folgen von Zufallsvariablen müssen wiederum Zufallsvariable aus V sein.

Die Glg (4.10) ist für alle Zufallsvariable $g(x)$ aus V gültig, insbesondere auch für $g(x) \equiv 1$. Aus $\mathbb{E}\{[y - \hat{g}_0(x)] \cdot 1\} = 0$ folgt damit sofort

$$\mathbb{E}\{\hat{g}_0(x)\} = m_y. \quad (4.11)$$

Der lineare Mittelwert m_y wird durch die beste Approximation voll nachgebildet. Die Fehlervariable $\varepsilon := y - \hat{g}_0(x)$ ist also auf jeden Fall mittelwertfrei. Für $g(x) \equiv \hat{g}_0(x)$ folgt aus (4.10):

$$\mathbb{E}\{y \hat{g}_0(x)\} = \mathbb{E}\{\hat{g}_0^2(x)\} \quad (4.12)$$

Für die absolut beste Approximation wurde diese Beziehung bereits in (4.5) angegeben. Für die Varianz des Fehlers ε folgt mit (4.12) und (4.11) die wichtige Beziehung

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{\hat{g}_0(x)}^2 \quad (4.13)$$

Nach diesen allgemeinen Aussagen soll das Orthogonalitätsprinzip zur Konstruktion einer konkreten Approximationsfunktion benutzt werden.

Es sei $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ein System von orthonormalen Polynomen der Zufallsvariablen x mit maximalem Grad n :

$$\mathbb{E} \{ \varphi_i(x) \cdot \varphi_k(x) \} = \delta_{ijk} \quad (4.14)$$

Die Menge V_n , aus der eine optimale Näherung der Zufallsvariablen y bestimmt werden soll, bestehe aus allen verallgemeinerten Polynomen der Form

$$g_n(x) = \sum_{v=0}^n a_v \varphi_v(x), \quad a_v \text{ reell.} \quad (4.15)$$

V_n enthält also neben den Potenzen der Zufallsvariablen x auch deren Linearkombinationen.

Die beste Approximation $\hat{g}_n(x)$ von y mit $\hat{g}_n \in V_n$ hat dann ebenfalls eine Darstellung gemäß (4.15):

$$\hat{g}_n(x) = \sum_{v=0}^n \hat{a}_v \varphi_v(x) \quad (4.16)$$

Das Problem besteht nun darin, die Koeffizienten $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$ zu bestimmen.

Da die Zufallsvariable $y - \hat{g}_n(x)$ zu allen Zufallsvariablen aus V_n orthogonal sein muß, kann die Orthogonalitätsbedingung (4.10) nacheinander für $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ betrachtet werden:

$$\mathbb{E} \{ [y - \hat{g}_n(x)] \cdot \varphi_i(x) \} = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n,$$

wobei für $\hat{g}_n(x)$ der Ausdruck (4.16) einzusetzen ist. Diese $n+1$ Gleichungen für $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n$ können wegen der Orthonormalität der $\varphi_i(x)$ sofort gelöst werden. Man erhält

$$\hat{a}_i = \mathbb{E} \{ y \cdot \varphi_i(x) \} \quad (4.17)$$

Die optimale Näherung für y aus V_n lautet dann

$$\hat{g}_n(x) = \sum_{v=0}^n \mathbb{E} \{ y \cdot \varphi_v(x) \} \cdot \varphi_v(x) \quad (4.18)$$

Es ist leicht zu sehen, daß man diese Lösung auch durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a_i} \mathbb{E} \{ [y - g_n(x)]^2 \}$ erhält. Während bei dieser

Vorgehensweise aber noch der erhaltene Extremwert diskutiert werden muß, führt das Orthogonalitätsprinzip unmittelbar auf das Minimum.

Wegen der Orthonormalitätsbedingung (4.14) folgt

$$\mathbb{E}\{\hat{g}_n^2(x)\} = \sum_{v=0}^n \hat{a}_v^2 \quad (4.19)$$

Damit lautet die Varianz des Fehlers $\epsilon_n = y - \hat{g}_n(x)$

$$\sigma_{\epsilon_n}^2 = \sigma_y^2 - \left[\sum_{v=0}^n \hat{a}_v^2 - \mathbb{E}^2\{\hat{g}_n(x)\} \right].$$

Wegen $\varphi_0(x) \equiv 1$ (siehe Abschn. 3.3) ist $a_0 = \mathbb{E}\{y\}$. Berücksichtigt man nun noch (4.11), so ergibt sich die Fehlervarianz zu

$$\sigma_{\epsilon_n}^2 = \sigma_y^2 - \sum_{v=1}^n \mathbb{E}^2\{y \cdot \varphi_v(x)\}. \quad (4.20)$$

Aus der Darstellung (4.18) folgt für die beste Approximation aus V_{n+1} der Zusammenhang:

$$\hat{g}_{n+1}(x) = \hat{a}_{n+1} \varphi_{n+1}(x) + \hat{g}_n(x) \quad (4.21)$$

Für die Fehlervarianz gilt dann die wichtige Beziehung

$$\sigma_{\epsilon_{n+1}}^2 = \sigma_{\epsilon_n}^2 - \hat{a}_{n+1}^2. \quad (4.22)$$

4.4 GENÄHERTE BESTIMMUNG DER ABSOLUT BESTEN APPROXIMATION

Zur Bestimmung von $\bar{y} = \mathbb{E}\{y|x\}$ muß das durch (4.3) gegebene Integral gelöst werden. Sieht man davon ab, daß diese Integration bereits mühsam sein kann, so ergeben sich spätestens dann Schwierigkeiten, wenn das Integrationsergebnis eine transzendente Funktion ist und nun nach $\mathbb{E}\{\hat{y}^2\}$ gefragt wird. Diese Problematik wird vermieden, wenn (4.3) mit Hilfe einer Reihenentwicklung für $p_{xy}(u,v)$ ausgewertet wird [16]. Wird in $g_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{p_{xy}(u,v)}{p_x(u)} dv$ die Entwicklung (3.1):

$$p_{xy}(u,v) = p_x(u) \cdot p_y(v) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} \varphi_{ix}(u) \varphi_{ky}(v) \quad (4.23)$$

eingesetzt, so folgt nach Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation - gleichmäßige Konvergenz sei vorausgesetzt -,

$$g_0(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} \varphi_{ix}(u) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot \varphi_{k,y}(v) p_y(v) dv.$$

Das Integral wird hinsichtlich der Beziehungen (3.19a) und (3.19b) umgeformt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \psi_{k,y}(v) p_y(v) dv = \tilde{c}_y \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1,y}(v) \psi_{k,y}(v) p_y(v) dv + m_y \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{0,y}(v) \psi_{k,y}(v) p_y(v) dv \\ = \tilde{c}_y \delta_{1,k} + m_y \delta_{0,k} ,$$

wobei die Orthonormalität der Polynome $\psi_{k,y}(y)$ ausgenutzt wurde.

Damit folgt $g_0(u) = \sum_{i=0}^{\infty} [a_{i,0} m_y + a_{i,1} \tilde{c}_y] \varphi_{i,x}(u)$.

Mit der für die Koeffizienten geltenden Beziehung (3.6):

$a_{i,0} = \delta_{i,0}$ erhält man die Darstellung

$$g_0(u) = m_y + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,1} \tilde{c}_y \varphi_{i,x}(u) \quad (4.24)$$

Die Koeffizienten $a_{i,1}$ ergeben sich aus (3.4) mit (3.19b) zu

$$a_{i,1} = \frac{1}{\tilde{c}_y} \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot \varphi_{i,x}(u) p_{xy}(u,v) du dv \quad (4.25)$$

Wird in (4.24) u durch die Zufallsvariable x ersetzt, so ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (4.23) eine Reihendarstellung für $\hat{y} = \mathbb{E}\{y|x\}$ ermittelt. Eine genäherte Darstellung der Zufallsvariablen $\hat{y}$ bekommt man dann durch Abbruch der Reihe (4.24) nach dem n -ten Glied:

$$\hat{g}_{0_n}(x) = m_y + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{i,x}(x) \quad (4.26)$$

mit

$$a_i := a_{i,1} \tilde{c}_y \quad (4.27)$$

Dieser Näherungsausdruck für $\hat{y}$ ergibt sich letztlich aus der Annahme, daß die Verbunddichte $p_{xy}(u,v)$ bereits hinreichend genau durch eine bezüglich i (s. Glg (4.23)) endliche Summe dargestellt werden kann. Daß (4.26) auch im Sinne einer besten Approximation interpretiert werden kann, ergibt sich aus dem Vergleich von (4.27) mit (4.17) und (4.26) mit (4.16); es ist

$$\hat{g}_{0_n}(x) \equiv \hat{g}_n(x) \quad \text{und} \quad a_i \equiv \tilde{a}_i .$$

Damit ist die durch Reihenabbruch gewonnene Darstellung (4.26) gleich der besten Approximation von y aus der Klasse V_n (V_n ist die Menge der durch (4.15) gegebenen Funktionen von x). Nach Satz 4.2 ist demzufolge die Näherung (4.26) auch die beste Approximation aus V_n für $\hat{y} = \mathbb{E}\{y|x\}$. Insbesondere kann $\mathbb{E}\{\hat{y}^2\}$ nun näherungsweise durch (4.19) berechnet werden.

Die absolut beste Approximation $\bar{y}$ kann selbst bereits der Klasse V_n angehören. Als ein derartiges Beispiel, für das sich $n=1$ ergeben wird, werde eine Verbunddichte betrachtet, für deren Reihenentwicklung die Bedingung (3.11): $a_{ik} = a_{kk} \cdot \delta_{ik}$ für alle i, k erfüllt sei, dh. $p_{xy}(u, v)$ soll eine Entwicklung der Form (3.12) besitzen. Dann folgt wegen $a_{i,1} = a_{1,1} \cdot \delta_{i,1}$ sofort, daß sich die Reihe (4.24) auf

$$\bar{y} \equiv g_0(x) = m_y + a_{1,1} \cdot \tilde{G}_y \varphi_{1,x}(x)$$

reduziert. Wegen (3.6c) und (3.19b) folgt hieraus

$$\bar{y} = m_y + \frac{\epsilon\{xy\} - m_x m_y}{\tilde{G}_x^2} (x - m_x). \quad (4.28)$$

Insbesondere führt also eine GAUSSsche Verbundverteilung auf eine derartige absolut beste Approximation [7], [14].

5 DIE STATISTISCHE APPROXIMATION VON NICHTLINEARITÄTEN DER FORM $y=f(x)$

5.1 ZUR BESTIMMUNG NICHTLINEARER ERSATZSYSTEME

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse des letzten Abschnittes auf nichtlineare, gedächtnislose Systeme, die einen stochastischen Prozeß $x(t)$ in einen Prozeß $y(t)$ überführen mögen, angewendet werden.

Zunächst ist sofort klar, daß sämtliche Aussagen von Kapitel 4 auf stochastische Prozesse übertragen werden können. Den Zufallsvariablen x und y ist dazu nur eine Zeitabhängigkeit t hinzuzufügen. Die Approximationsaussagen gelten dann für einen "Abtastwert" $y(t_i)$ des Prozesses $y(t)$, der von dem zum gleichen Zeitpunkt t_i betrachteten "Abtastwert" $x(t_i)$ als statistisch abhängig angenommen wird. Die Approximation des Prozesses $y(t)$ entsteht, indem man von $\bar{y}(t_i)$ zu $\bar{y}(t)$ übergeht. Die spezielle Form der Approximationsfunktion g_0 : $\bar{y} = g_0(x)$ ist unabhängig von t , denn diese wird nur durch die Dichte $p_{x(t),y(t)}(u,v)$ geprägt, die wiederum bei vorausgesetzter Verbundstationarität von t unabhängig ist.

Eine derartige Zeitunabhängigkeit findet man auch bei der Signalverformung durch Nichtlinearitäten ohne Gedächtnis. Der Momentanwert am Systemausgang hängt nur von dem gleichzeitig anliegenden Wert des Eingangssignals ab, nicht aber etwa von dessen Vergangenheit. Für die Verformung eines stochastischen Prozesses durch eine solche Nichtlinearität bedeutet dieses statische Verhalten, daß nur die Funktion einer Zufallsvariablen betrachtet werden muß:

$$y(t) = f[x(t)] \quad , \quad t \text{ beliebig konstant} \quad (5.1)$$

Bei allen statischen Betrachtungen kann in (5.1) daher der Parameter t fortgelassen werden.

In Abschnitt 4 wurde davon ausgegangen, daß zwischen den Zufallsvariablen x und y ein statistischer Zusammenhang bestand. Ausgehend von der Verbundverteilungsdichte gelang es, eine absolut beste Approximation für y als Funktion von x anzugeben. In dem jetzt betrachteten Fall ist bereits von vornherein die statistische Abhängigkeit durch die funktionale Abhängigkeit (5.1) ersetzt. Die Approximation der Zufallsvariablen y kann daher nur durch solche Funktionen erfolgen, die nicht bereits die

Kennlinienfunktion f enthalten. Ein Zusammenhang dieser anscheinend unterschiedlichen Situationen ergibt sich aus der Feststellung, daß auch bei einer funktionalen Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen eine Verbundwahrscheinlichkeit angegeben werden kann. Da bei einer eindeutigen Funktion f das Eintreten des Ereignisses $\{u < x \leq u + \Delta u\}$ eindeutig das Ereignis $\{f(u) < y \leq f(u + \Delta u)\}$ zur Folge hat, folgt nach (2.25) für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$W \{ y \leq v \mid u < x \leq u + \Delta u \} = \begin{cases} 0 & \text{für } v < f(u) \\ 1 & \text{für } v \geq f(u) \end{cases} .$$

Hieraus ergibt sich die bedingte Dichte

$$p_{y|x=u}(v, u) = \delta[v - f(u)] ,$$

so daß nach (2.26) für die Verbunddichte von x und y folgt:

$$p_{xy}(u, v) = p_x(u) \cdot \delta(v - f(u)) . \quad (5.2)$$

Die Verbunddichte entartet somit zu einer mit $p_x(u)$ gewichteten Impulsfläche entlang der Kurve $v = f(u)$. Die funktionale Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen kann demzufolge als Grenzfall der statistischen Abhängigkeit dieser Variablen gedeutet werden. Der zweite Extremfall ist die statistische Unabhängigkeit von x und y . Für die spezielle Dichte (5.2) sollen nun die im letzten Abschnitt erhaltenen Ergebnisse interpretiert werden.

Zunächst folgt für die durch (4.3) gegebenen Werte der absolut besten Approximation von y unter Verwendung der Ausblendeigenschaft der δ -Distribution sofort

$$g_0(u) = f(u) . \quad (5.3)$$

Nimmt also die Zufallsvariable x den Wert u an, so stimmt der Wert der absolut besten Approximation überein mit dem Wert $f(u)$, den die Zufallsvariable y annimmt.

In 4.4 wurde für $\hat{y}$ eine Orthogonalreihendarstellung $\hat{g}_0(x)$ (Glg (4.24)) bestimmt, deren n -te Partialsumme $\hat{g}_0(x)$ eine Näherung für $\hat{y}$ lieferte. Wegen $\hat{y} \equiv y$ ist damit aber auch eine n -Näherung für $y = f(x)$ gegeben:

$$\hat{y}_n := \hat{g}_0(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) \quad (5.4)$$

mit

$$a_i = \mathcal{E} \{ f(x) \cdot \varphi_i(x) \} . \quad (5.5)$$

Die Funktionen φ_i sind dabei orthonormal bezüglich der Dichtefunktion $p_x(u)$. Der Ausdruck für a_i ergibt sich aus (4.17), wenn für p_{xy} die

Beziehung (5.2) eingesetzt und wiederum die Ausblendeigenschaft angewendet wird.

Ebenfalls nach Abschnitt 4.4 besitzt die Näherung $\hat{g}_0(x)$ die Eigenschaft, beste Approximation für $\hat{y}$ aus V_n zu sein. Infolgedessen ist $\hat{y}_n$ auch die beste Approximation aus V_n für $y = f(x)$.

Systemtheoretisch kann die Beziehung (5.4) als Kennlinie eines gedächtnislosen nichtlinearen Systems gedeutet werden. Dieses nichtlineare Ersatzsystem für das durch $y(t) = f[x(t)]$ gegebene System ist optimal in dem Sinn, daß der Erwartungswert des quadratischen Fehlers $\varepsilon_n(t) := y(t) - \hat{y}_n(t)$ minimal wird. Für diesen gilt nach (4.20):

$$\mathbb{E}\{\varepsilon_n^2(t)\} = \mathbb{E}\{y^2(t)\} - \sum_{i=0}^n a_i^2 \quad (5.6)$$

Die Ersatzkennlinie $\hat{g}_0(u)$ entsteht durch Approximation des Ausgangsprozesses $y(t)$. Sie ist abhängig von der Verteilungsdichte des Eingangsprozesses $x(t)$, denn diese legt die Entwicklungsfunktionen $\varphi_i(u)$ wie auch die Koeffizienten a_i fest. Bei ein und derselben Nichtlinearität werden sich bei verschiedenen Eingangsverteilungen auch unterschiedliche Ersatzkennlinien ergeben. Das Ersatzsystem wird der Eingangsverteilung angepaßt. Daher soll von einer statistischen Approximation der Nichtlinearität gesprochen werden.

Nach den Überlegungen in (4.4) kann angenommen werden, daß der Approximationsfehler für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Für jede beliebig kleine Fehlerschranke Δ gibt es dann eine Zahl N , so daß

$$\sigma_{\varepsilon_n}^2 \leq \Delta \quad \text{für } n \geq N.$$

Wegen der Gleichung (4.22) bedeutet das, daß durch schrittweise Hinzunahme eines weiteren Gliedes $a_j \cdot \varphi_j(u)$ die Approximationsgenauigkeit bis unter die gewünschte Fehlerschranke verbessert werden kann, ohne daß bei jedem Schritt etwa die Gesamtheit der Approximationskoeffizienten neu berechnet werden müßte.

Der erste Schritt zur Bestimmung der optimalen Ersatzkennlinie besteht darin, daß man sich ein bezüglich der Eingangsverteilung $p_x(u)$ orthonormales Funktionensystem verschafft. Dieses Problem wurde im Zusammenhang mit der Reihenentwicklung für Verbunddichten bereits in 3.4 ausführlich erörtert. Mit den dort für beliebige symmetrische Dichten entwickelten

ersten fünf Orthonormalpolynomen ist die Struktur der Ersatzkennlinie bezüglich der Dichte $p_x(u)$ für die meisten Probleme ausreichend bestimmt. Ist die Dichte symmetrisch bezüglich $u=0$ (dann ist $m_x = 0$), so ergibt sich mit (3.20b) eine wichtige Vereinfachung für die Koeffizienten a_i , $i=0,1..n$. Aus (5.5) folgt nämlich für $v=0,1,2...$

$$a_{2v+1} = 0, \text{ wenn } f(-u) = f(u) \quad (5.7a)$$

$$a_{2v} = 0, \text{ wenn } f(-u) = -f(u) . \quad (5.7b)$$

Im Falle einer ungeraden nichtlinearen Kennlinie ist also auch die Approximation ungerade; ist dagegen die Kennlinie gerade, so ist auch die Approximationskennlinie gerade.

Das in Satz 4.3 angegebene Orthogonalitätsprinzip bezieht sich auf die Approximation der Zufallsvariablen y durch Funktionen von x mit vorgegebener Struktur. Es ist unabhängig von dem notwendigerweise vorhandenen statistischen Zusammenhang zwischen x und y und daher auch für den Grenzfall $y = f(x)$ gültig. Mit der optimalen Fehlervariablen $\epsilon_n := y - \hat{y}_n$ gilt damit

$$\mathbb{E} \{ \epsilon_n \cdot \varphi_k(x) \} = 0 \quad \text{für } k=0,1,...,n . \quad (5.8a)$$

oder aber auch

$$\mathbb{E} \{ \epsilon_n \cdot \hat{y}_n \} = 0 . \quad (5.8b)$$

Insbesondere folgt für $k=1$ mit $\varphi_1(x) = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$ aus (5.8a) wegen

$$\mathbb{E} \{ \epsilon_n \} = 0: \quad \left. \begin{aligned} \mathbb{E} \{ \epsilon_n x \} &= 0 \\ \mathbb{E} \{ y x \} &= \mathbb{E} \{ \hat{y}_n \cdot x \} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

bzw.

Die Korrelation zwischen der besten Approximation und x stimmt demnach überein mit der Korrelation zwischen Ein- und Ausgang der Nichtlinearität.

5.2 EIN SPEZIALFALL: DIE ÄQUIVALENTE VERSTÄRKUNG

Beschränkt man sich bei der Approximation auf den Fall $n=1$, so lautet die Ersatzkennlinie *

$$g_1(u) = a_0 \varphi_0(u) + a_1 \varphi_1(u) .$$

Es sei zunächst eine ungerade Kennlinie und eine gerade Verteilungsdichte $p_x(u)$ angenommen. Nach (5.7b) ist dann $a_0=0$. Mit $\varphi_1(u) = \frac{u - m_x}{\sigma_x}$

* Im folgenden wird stets die optimale Kennlinie betrachtet, was in der Bezeichnung nicht mehr hervorgehoben wird.

wird der verbleibende Koeffizient a_1 durch $a_1 = \mathcal{E} \left\{ f(x) \cdot \frac{x}{\sigma_x} \right\}$ bestimmt, so daß man für $\hat{y}_1$ die folgende Darstellung erhält

$$\hat{y}_1 = \frac{\mathcal{E} \{ f(x) \cdot x \}}{\sigma_x^2} \cdot x \quad (5.10)$$

Das ist aber gerade die von BOOTON erstmals angegebene Darstellung eines "quasilinearen" Ersatzsystems für die Nichtlinearität $y=f(x)$. Der Faktor

$$K := \frac{\mathcal{E} \{ f(x) \cdot x \}}{\sigma_x^2} \quad (5.11)$$

wird als äquivalente Verstärkung bezeichnet. Unter den obigen Voraussetzungen gilt der Zusammenhang

$$a_1 = K \cdot \sigma_x$$

K ist zwar eine Kenngröße der Nichtlinearität, beinhaltet aber zusätzlich noch die eindimensionale Statistik des Eingangsprozesses. Für eine GAUSSsche Verteilungsdichte $p_x(u)$ gilt

$$K = K(\sigma_x),$$

da in diesem Fall der Erwartungswert des Zählers allein von der Streuung σ_x abhängig ist. Es ist jedoch offensichtlich, daß die von BOOTON geforderte Beschränkung auf GAUSSsche Eingangsprozesse keineswegs erforderlich ist. Eine derartige Notwendigkeit kann allenfalls bei einer quasilinearen Behandlung nichtlinearer Regelkreise gesehen werden.

Für unsymmetrische Kennlinien ist $a_0 \equiv m_y \neq 0$. In (5.10) muß daher m_y noch additiv berücksichtigt werden. Ist schließlich am Eingang ein linearer Mittelwert vorhanden, so ergibt sich mit $\varphi_1(x) = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$ anstelle von (5.10) die optimale Approximation zu

$$\hat{y}_1 = m_y + \left[\frac{\mathcal{E} \{ f(x) \cdot x \}}{\sigma_x^2} - \frac{m_y m_x}{\sigma_x^2} \right] (x - m_x). \quad (5.10a)$$

Es gilt in diesem Fall der Zusammenhang

$$a_1 = \sigma_x \cdot K - \frac{m_x m_y}{\sigma_x}$$

(5.10a) stellt die von KAZAKOV [1] angegebene Erweiterung des BOOTONschen Ansatzes dar.

Eine wichtige, im Zusammenhang mit der äquivalenten Verstärkung gemachte Feststellung besagt, daß der Verzerrungsanteil v , definiert durch

$$y = Kx + v, \quad (5.12)$$

und die Eingangsgröße unkorreliert bzw. orthogonal sind:

$$\mathbb{E} \{v \cdot x\} = 0 \quad (5.13)$$

Der Verzerrungsanteil v ist gerade der minimale Fehler ε_1 . Man sieht, daß es sich bei der Aussage (5.13) um den Spezialfall $n=1$ der allgemeiner für das nichtlineare Ersatzsystem geltenden Orthogonalitätsbeziehung (5.8a) bzw. (5.9) handelt. Die Herleitung von K aus einer (5.13) entsprechenden Beziehung erfolgte erstmals durch MERCHAV [21]. Die Ausweitung auf den Fall eines mittelwertbehafteten Eingangsprozesses ist offensichtlich.

Mit dem Orthogonalitätsprinzip kann auch eine Mehrgrößendarstellung eines Ersatzsystems für den Fall bestimmt werden, daß sich x aus mehreren statistisch unabhängigen Größen additiv zusammensetzt. In [2], [3], [22] wird der Fall $x(t) = r(t) + s(t)$ mit einem stationären Rauschen $r(t)$ und einem harmonischen Signal $s(t)$ diskutiert. Der Ausgangsprozeß $y(t)$ soll dann für festes t durch

$$\hat{y}_{(1)}(t) = K_r r(t) + K_s s(t)$$

optimal approximiert werden (Bild 5.1), wobei zur Vereinfachung eine ungerade Kennlinie und verschwindende Mittelwerte angenommen werden. Wird in Satz 4.3 die Menge V als Menge aller Zufallsvariablen der Form

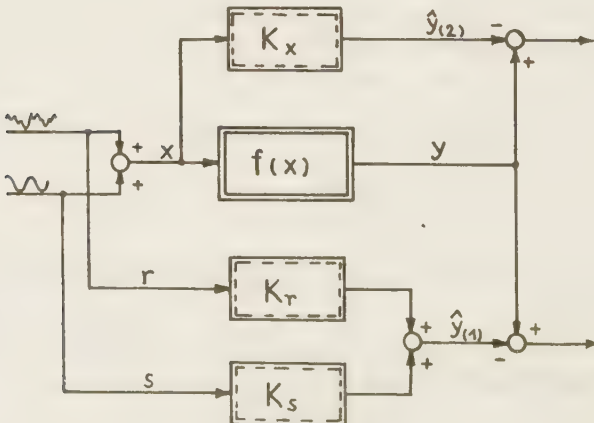


Bild 5.1

$a + bs$ (a, b reell) gedeutet, so folgt aus diesem Satz:

$$\mathbb{E}\{[y - (K_r \cdot r + K_s \cdot s)] \cdot r\} = 0$$

und

$$\mathbb{E}\{[y - (K_r \cdot r + K_s \cdot s)] \cdot s\} = 0 ,$$

woraus sich sofort mit $\mathbb{E}\{r \cdot s\} = 0$ die gesuchten Beziehungen

$$K_r = \frac{\mathbb{E}\{f(r+s) \cdot r\}}{\sigma_r^2}$$

$$K_s = \frac{\mathbb{E}\{f(r+s) \cdot s\}}{\sigma_s^2}$$

ergeben. Für den quadratischen Mittelwert der Approximation folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\hat{y}_{(1)}^2\} &= K_r^2 \sigma_r^2 + K_s^2 \sigma_s^2 \\ &= \frac{\mathbb{E}^2\{f(x) \cdot r\}}{\sigma_r^2} + \frac{\mathbb{E}^2\{f(x) \cdot s\}}{\sigma_s^2} . \end{aligned}$$

Zum Vergleich sei die äquivalente Verstärkung des durch $\hat{y}_{(2)} = K_x \cdot x$ festgelegten Ersatzsystems angegeben. Mit $\sigma_x^2 = \sigma_r^2 + \sigma_s^2$ erhält man

$$K_x = \frac{\mathbb{E}\{f(r+s) \cdot r\} + \mathbb{E}\{f(r+s) \cdot s\}}{\sigma_r^2 + \sigma_s^2} .$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\hat{y}_{(2)}^2\} &= K_x^2 \cdot \sigma_x^2 \\ &= \frac{[\mathbb{E}\{f(x) \cdot r\} + \mathbb{E}\{f(x) \cdot s\}]^2}{\sigma_r^2 + \sigma_s^2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbb{E}\{\hat{y}_{(2)}^2\} = \frac{[\sigma_r^2 K_r + \sigma_s^2 K_s]^2}{\sigma_r^2 + \sigma_s^2} .$$

Mit $K_s := \alpha K_r$, $\sigma_s^2 = \beta \sigma_r^2$, $\alpha, \beta > 0$ folgt:

$$\mathbb{E}\{\hat{y}_{(1)}^2\} = K_r^2 \cdot \sigma_r^2 (1 + \alpha^2 \beta)$$

und

$$\mathbb{E}\{\hat{y}_{(2)}^2\} = K_r^2 \sigma_r^2 \cdot \frac{(1 + \alpha \beta)^2}{1 + \beta} .$$

Durch identische Umformung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \alpha \beta)^2}{1 + \beta} &= 1 + \alpha^2 \beta + \frac{(1 + \alpha \beta)^2}{1 + \beta} - \frac{(1 + \alpha^2 \beta)(1 + \beta)}{1 + \beta} \\ &= 1 + \alpha^2 \beta - \frac{\beta(1 - \alpha)^2}{1 + \beta} , \end{aligned}$$

woraus für die beiden quadratischen Mittelwerte der folgende Zusammenhang resultiert:

$$\mathbb{E}\{y_{(2)}^2\} = \mathbb{E}\{y_{(1)}^2\} - \frac{\tilde{\sigma}_r^2 \cdot \tilde{\sigma}_s^2}{\tilde{\sigma}_r^2 + \tilde{\sigma}_s^2} \cdot (K_r - K_s)^2.$$

Da sämtliche Größen positiv sind, folgt wegen

$$\mathbb{E}\{y^2\} - \mathbb{E}\{y_{(2)}^2\} = \mathbb{E}\{y^2\} - \mathbb{E}\{y_{(1)}^2\} + \frac{\tilde{\sigma}_r^2 \cdot \tilde{\sigma}_s^2}{\tilde{\sigma}_r^2 + \tilde{\sigma}_s^2} \cdot (K_r - K_s)^2,$$

daß die Mehrgrößenstruktur für das quasilineare Ersatzsystem tatsächlich zu dem geringeren Approximationsfehler führt.

5.3 DAS NICHTLINEARE ERSATZSYSTEM BEI GAUSSscher EINGANGSVERTEILUNG

Im Falle eines GAUSSverteilten Eingangsprozesses lautet die Orthonormalitätsbedingung für die Entwicklungspolynome $\varphi_n(u)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(u) \varphi_n(u) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tilde{\sigma}_x} e^{-\frac{(u - m_x)^2}{2\tilde{\sigma}_x^2}} du = \delta_{m,n}.$$

Die Substitution $\frac{u - m_x}{\tilde{\sigma}_x} = v$ führt auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\tilde{\sigma}_x v + m_x) \varphi_n(\tilde{\sigma}_x v + m_x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \delta_{m,n}.$$

Ein Vergleich mit der für HERMITE-Polynome $H_n(u)$ geltenden Orthonormalitätsrelation (2.29) ergibt wegen der Eindeutigkeit der Orthonormalpolynome

$$\varphi_n(u) \equiv \frac{H_n\left(\frac{u - m_x}{\tilde{\sigma}_x}\right)}{\sqrt{n!}}. \quad (5.15)$$

Die statistische Approximation der Kennlinie $v=f(u)$ lautet bei GAUSSscher Eingangsverteilung somit

$$g_n(u) = \sum_{i=0}^n c_i \frac{H_i\left(\frac{u - m_x}{\tilde{\sigma}_x}\right)}{\sqrt{i!}} \quad (5.16)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$c_i = \mathbb{E}\left\{f(x) \cdot \frac{H_i\left(\frac{x - m_x}{\tilde{\sigma}_x}\right)}{\sqrt{i!}}\right\} \quad (5.17)$$

Die Bezeichnung der Entwicklungskoeffizienten mit c_i anstatt mit a_i soll dabei die GAUSSsche Eingangsverteilung kennzeichnen.

Die durch (5.16) bestimmte nichtlineare Ersatzkennlinie für $v=f(u)$ ist damit der Statistik des Eingangsgerausches angepaßt. Eine Anpassung an die Systemeigenschaften, d.h. an die Kennlinienform, erfolgt durch Auswertung der Koeffizienten (5.17) für die jeweilige Nichtlinearität. Wegen der Bedeutung dieser Koeffizienten soll auf ihre Bestimmung in einem eigenen Kapitel ausführlicher eingegangen werden.

5.4 EINE STATISTISCHE BEGRÜNDUNG DER HARMONISCHEN ANALYSE

Der Eingangsprozeß eines gedächtnislosen nichtlinearen Systems werde durch ein harmonisches Signal gegeben, dessen Phase in $[-\pi, \pi]$ eine gleichverteilte Zufallsvariable sei:

$$x(t) := x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.18)$$

Die Verteilungsdichte des Prozesses $x(t)$ lautet

$$p_x(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{x_0^2 - u^2}} & \text{für } |u| < x_0 \\ 0 & \text{für } |u| \geq x_0 \end{cases} \quad (5.19)$$

Das bezüglich $p_x(u)$ orthonormale Funktionensystem ist dann gegeben durch

$$\varphi_k(u) = \begin{cases} \sqrt{2} \cdot T_k\left(\frac{u}{x_0}\right) & \text{für } k \geq 1 \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}, \quad (5.20)$$

wo $T_k(u)$ die TSCHEBYSCHOFF-Polynome 1. Art sind:

$$T_k\left(\frac{u}{x_0}\right) = \cos\left(k \arccos \frac{u}{x_0}\right) \quad (5.21a)$$

Den Polynomcharakter von $T_k\left(\frac{u}{x_0}\right)$ ersieht man leichter aus der Beziehung [20]:

$$T_k\left(\frac{u}{x_0}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{u}{x_0}\right)^2 - 1} \right)^k + \left(\frac{u}{x_0} - \sqrt{\left(\frac{u}{x_0}\right)^2 - 1} \right)^k \right] \quad (5.21b)$$

Die der Eingangsverteilung angepaßte Kennlinienapproximation wird dann

$$\text{durch } \hat{y}_n = d_0 + d_1 \sqrt{2} T_1\left(\frac{x}{x_0}\right) + d_2 \sqrt{2} T_2\left(\frac{x}{x_0}\right) + \dots + d_n \sqrt{2} T_n\left(\frac{x}{x_0}\right). \quad (5.22a)$$

mit

$$d_0 = m_y$$

$$d_k = \int_{-x_0}^{x_0} f(u) \sqrt{2} T_k\left(\frac{u}{x_0}\right) \frac{du}{\pi \sqrt{x_0^2 - u^2}}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (5.22b)$$

gegeben. Diese Ersatzbeschreibung der Kennlinie ist also optimal in dem Sinn, daß $\mathbb{E}\{[f(x) - \hat{y}_n]^2\}$ minimal ist.

Da nach Voraussetzung die Phase in (5.18) gleichverteilt sein soll, ist der Prozeß $x(t)$ ergodisch [7], so daß die gesamte statistische Information in einer Musterfunktion enthalten ist, etwa in

$$x(t) = x_0 \sin \omega t.$$

Für das Ausgangssignal des nichtlinearen Ersatzsystems gilt dann die Darstellung

$$\hat{y}_{2n-1}(t) = d_1 \sqrt{2} T_1(\sin \omega t) + d_3 \sqrt{2} T_3(\sin \omega t) + \dots + d_{2n-1} \sqrt{2} T_{2n-1}(\sin \omega t),$$

wo zur Vereinfachung eine schiefssymmetrische Kennlinie angenommen worden ist, so daß von vornherein nur ungerade Glieder auftreten.

Zur Umformung von $T_{2k-1}(\sin \omega t)$ wird (5.21b) benutzt:

$$T_{2k-1}(\sin \omega t) = \frac{1}{2} \left[(\sin \omega t + \sqrt{\sin^2 \omega t - 1})^{2k-1} + (\sin \omega t - \sqrt{\sin^2 \omega t - 1})^{2k-1} \right]$$

Mit der EULERSchen Relation folgt hieraus nach kurzer Umformung:

$$T_{2k-1}(\sin \omega t) = \frac{j}{2} \left[e^{-j1\omega t} + (-1)^1 \cdot e^{j1\omega t} \right], \quad 1 := 2k-1$$

$$= (-1)^{k+1} \sin 1\omega t.$$

Für die Entwicklungskoeffizienten folgt mit $u = x_0 \cdot \sin \omega t$ und dieser Be-

ziehung $d_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}\omega}^{\frac{\pi}{2}\omega} f(x_0 \sin \omega t) \cdot \sqrt{2} T_1(\sin \omega t) \cdot \frac{d(x_0 \sin \omega t)}{\pi x_0 \cos \omega t} dt$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \sqrt{2} \omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\omega}^{\frac{\pi}{2}\omega} f(x_0 \sin \omega t) \cdot \sin 1\omega t dt, \quad 1 = 2k-1 \dots$$

Mit der Abkürzung $a^{(1)} := \sqrt{2} (-1)^{k+1} d_1 = \frac{2\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\omega}^{\frac{\pi}{2}\omega} f(x_0 \sin \omega t) \sin 1\omega t dt$ (5.23)

ergibt sich damit

$$\hat{y}_{2n-1} = a^{(1)} \cdot \sin \omega t + a^{(3)} \cdot \sin 3\omega t + \dots + a^{(2n-1)} \cdot \sin(2n-1)\omega t \quad (5.24)$$

Die aus der statistischen Betrachtungsweise bestimmte Ersatzkennlinie liefert somit bei der Spezialisierung auf den Repräsentanten $x_0 \cdot \sin \omega t$ als Eingangssignal gerade die $(2n-1)$ te Fouriersumme des periodischen Ausgangssignals $y(t) = f(x_0 \cdot \sin \omega t)$. Der Ausdruck $\frac{a^{(1)}}{x_0}$ definiert bekanntlich die sog. Beschreibungsfunktion. Der Vergleich von (5.22a) mit (5.24) bzw. (5.22b) mit (5.23) zeigt daher, daß die Beschreibungsfunktion als statistische äquivalente Verstärkung gedeutet werden kann, wenn nur die Dichte (5.19) zugrunde gelegt wird.

Eine weitere Aussage fällt bei dieser Herleitung als Randergebnis ab.

Es ist nämlich $a^{(2k)} \equiv 0$.

Der Beweis dieser aus der Theorie der Fourierreihen her bekannten Feststellung erfolgt dort unter der Voraussetzung, daß für das in eine Fourierreihe zu entwickelnde Signal die Beziehung $y(t + \frac{\pi}{\omega}) = -y(t)$ (Symmetrie dritter Art) gilt, was wegen $f(-x) = -f(x)$ sofort verifiziert werden kann.

Bei geraden Kennlinien treten in der Entwicklung (5.22a) nur gerade Koeffizienten auf. Wegen $T_{2k}(\sin \omega t) = (-1)^k \cos 2k\omega t$ ergibt sich dann eine zu (5.25) entsprechende Fouriersumme, die nur cos-Komponenten besitzt:

$$\bar{y}_{2n}(t) = b^{(0)} + b^{(2)} \cos 2\omega t + b^{(4)} \cos 4\omega t + \dots + b^{(2n)} \cos 2n\omega t \quad (5.26)$$

Ein einfaches Beispiel einer derartigen Entwicklung wird durch $f(x) = x^2$ gegeben. Mit $x(t) = x_0 \sin \omega t$ folgt sofort $y(t) = x_0^2 \sin^2 \omega t = x_0^2 - x_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \cdot \cos 2\omega t$. Auch bei eindeutigen Nichtlinearitäten ohne Energiespeicher kann daher bei sinusförmiger Erregung die Fourierzerlegung des Ausgangssignals cos-Komponenten enthalten.

5.5 EINE MESSANORDNUNG

Im Falle eines ergodischen Prozesses $x(t)$ ist eine vom Prinzip her einfache meßtechnische Bestimmung des nichtlinearen Ersatzsystems möglich, denn dann können die benötigten Mittelwerte durch Zeitmittelung aus einem Mustersignal gewonnen werden. Mit

$$\epsilon_k(t) = y(t) - \sum_{i=0}^k a_i \varphi_i[x(t)] \quad , k=0,1,\dots,n$$

ergibt sich nach (5.4) eine Meßanordnung aus der Forderung:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_k^2(t) dt \stackrel{!}{=} \text{Min} (a_0, \dots, a_k)$$

Diese Meßanordnung zeigt Bild 5.2.

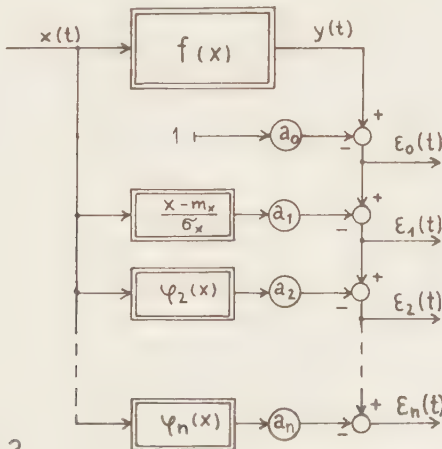


Bild 5.2

Die Polynomkennlinien $\varphi_i(x)$ sind dabei dem Eingangssignal anzupassen. Nach Abschnitt (3.3) werden für $\varphi_i(x)$ die Momente $m_{x,1}$, $m_{x,2i}$ benötigt, die ebenfalls durch eine Zeitmittelung bestimmt werden können.

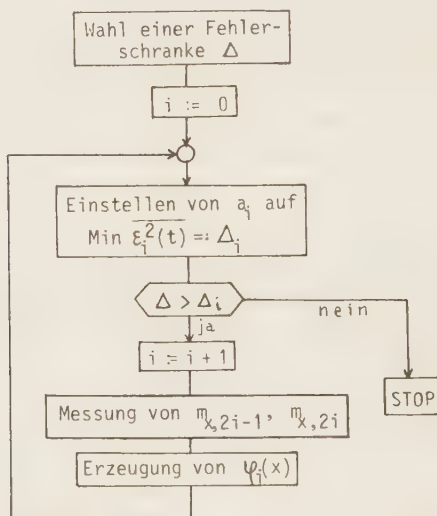


Bild 5.3

Die grundsätzliche Vorgehensweise ist aus dem in Bild 5.3 dargestellten Flußdiagramm zu ersehen, wobei auf meßtechnische Einzelheiten verzichtet wurde. Die u.a. bei der Bestimmung der Größen $m_{x,i}$ auftretenden Genauigkeitsprobleme können durch die Benutzung eines Hybridrechners erheblich verringert werden. Folgende Vorteile seien zusammenfassend noch einmal genannt:

1. Die Bestimmung der Koeffizienten a_i kann beginnend mit a_0 so weit erfolgen, bis eine vorgegebene Genauigkeitsschranke erreicht ist.
2. Die Messung kann auch dann erfolgen, wenn die zu analysierende Nichtlinearität Bestandteil einer Steuerkette ist, sofern nur am Eingang und Ausgang der Nichtlinearität ein Signalabgriff möglich ist.
3. Die Meßvorschrift ist in gleicher Weise für stochastische wie auch

für deterministische Signale gültig. Die orthogonalen Polynomkennlinien des Ersatzsystems werden durch die Meßgrößen $\frac{1}{T} \int_0^T x^i(t) dt$ festgelegt. Die von dem Eingangssignal benötigte Information ist also um so geringer, je niedriger die Ordnung des Ersatzsystems und desto größer damit der zugelassene Fehler ist.

6. NICHTLINERE ERSATZSYSTEME BEI GAUSSscher EINGANGSVERTEILUNG

Die Koeffizienten c_k nach Glg(5.17) treten außer bei dem in dieser Arbeit im Vordergrund stehenden nichtlinearen Ersatzsystemen auch bei anderen Problemen auf und werden in diesem Zusammenhang in der Literatur behandelt. So gibt PERVOZVANSKIJ [23] für die genäherte Bestimmung der Autokorrelationsfunktion am Ausgang der Nichtlinearität eine Zusammenstellung der ersten fünf Koeffizienten c_k von zahlreichen Nichtlinearitäten an. Bei PUPKOV [24] findet man im Zusammenhang mit der Bestimmung eines dynamischen linearen Ersatzsystems für die statische Nichtlinearität die Graphen von c_1 bis c_5 für verschiedene stückweise lineare Kennlinien. In diesem Abschnitt sollen zunächst, ausgehend von (5.17), einige allgemeine Beziehungen hergeleitet werden, die die Bestimmung der Koeffizienten erleichtern. Für ausgewählte Beispiele werden, wiederum in allgemeiner Form, Koeffizientenformeln bestimmt, und schließlich wird das Verhalten der Approximationsfehler ausführlich diskutiert.

6.1 ZUR BESTIMMUNG DER ENTWICKLUNGSKOEFFIZIENTEN

Bei GAUSSverteiletem Eingangsprozeß ist für die äquivalente Verstärkung bei differenzierbarer Kennlinie die Darstellung

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(u)}{du} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}} du \quad (6.1)$$

bekannt [25]. Eine analoge Darstellung existiert für die Koeffizienten c_n und soll im folgenden bewiesen werden. Es gilt

Es sei $f(u)$ k -mal differenzierbar und es gelte $\lim_{u \rightarrow \pm \infty} f(u) \cdot H_n\left(\frac{u}{\sigma_x}\right) e^{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}} = 0$.

Dann besitzen die Entwicklungskoeffizienten c_n die Darstellung

$$c_n = \frac{\sigma_x^k}{\sqrt{n!}} \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k f(x)}{dx^k} \cdot H_{n-k} \left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right) \right\} \quad (6.2)$$

Zum Beweis wird von (5.17) ausgegangen und $H_n(u)$ durch die Rodrigues-Formel ausgedrückt:

$$H_n(u) = (-1)^n e^{\frac{u^2}{2}} \frac{d^n}{du^n} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

oder aber
$$H_n\left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right) = (-1)^n \cdot \sigma_x^{-n} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)^2} \cdot \frac{d^n}{du^n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)^2}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) H_n\left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)^2} du \\ &= \frac{(-1)^n \sigma_x^{n-1}}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{d^n}{du^n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)^2} du \\ &= \frac{(-1)^n \sigma_x^{n-1}}{\sqrt{n!} \cdot 2} \left\{ f(u) \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} e^{-\frac{1}{2} (\cdot)^2} \right\} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(u)}{du} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} e^{-\frac{1}{2} (\cdot)^2} du \end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet nach Voraussetzung.

Also wird

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(u)}{du} \underbrace{(-1)^{n-1} \sigma_x^{n-1} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)^2} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)^2}}_{\substack{\text{Rodrigues-Formel} \\ \text{für } H_{n-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x}\right)^2} du \\ &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{n!}} \mathcal{L} \left\{ \frac{df(x)}{dx} \cdot H_{n-1} \left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right) \right\} \quad (6.3) \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man durch k -malige partielle Integration die gesuchte Beziehung (6.2). Damit ist eine erhebliche Reduzierung des für die Bestimmung der c_n erforderlichen Aufwandes erzielt.

Im Fall von stückweise glatten Kennlinien kann durch Übergang zu Distributionen und Ausnutzung der Ausblendeigenschaft bei der Integration eine weitere Vereinfachung erreicht werden.

Für mittelwertbehaftete Eingangsprozesse gibt PERVOZVANSKIJ eine Beziehung an, die die Abhängigkeit der Koeffizienten von dem linearen Mittelwert ausnutzt. Aus (5.17) folgt zunächst durch Differentiation nach m_x mit der Abkürzung $\frac{u - m_x}{\sigma_x} =: v$ und der GAUSSschen Dichte $\varphi_x(u)$:

$$\frac{\partial}{\partial m_x} c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[-\frac{1}{\sigma_x} \frac{d}{dv} H_n(v) + H_n(v) \frac{1}{\sigma_x} \cdot v \right] \varphi_x(u) du$$

Mit der für HERMITE-Polynome geltenden Beziehung

$$\frac{d}{dv} H_n(v) = n H_{n-1}(v)$$

und der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(v) = v H_n(v) - n H_{n-1}(v)$$

erhält man sofort

$$\frac{\partial}{\partial m_x} c_n = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot H_{n+1}\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)^2} du$$

und daraus

$$c_{n+1} = \sqrt{n+1} \sigma_x \frac{\partial}{\partial m_x} c_n, \quad n=0,1,\dots \quad (6.4)$$

Bei einer vorgegebenen Kennlinie kann damit die Bestimmung der Koeffizienten sukzessiv durch partielle Differentiation nach dem linearen Mittelwert der Eingangsverteilung bestimmt werden. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß außer bei der Ermittlung von c_0 die Integrationen entfallen. Zwar entstehen aufgrund der konvergenzbeschleunigenden Eigenschaft von $e^{-\frac{u^2}{2}}$ für die praktisch relevanten Kennlinienfunktionen keine Konvergenzprobleme bei der Integration, doch ist diese insbesondere bei transzendenten Funktionen $f(u)$ i.a. nicht mehr elementar durchführbar.

Eine weitere mitunter hilfreiche Beziehung für die c_n ergibt sich, wenn auf (5.17) sofort die Rekursionsformel angewendet wird. Man erhält dann

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\mathcal{E} \left\{ f(x) \cdot \frac{x-m_x}{\sigma_x} H_{n-1} \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right) \right\} - (n-1) \mathcal{E} \left\{ f(x) \cdot H_{n-2} \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right) \right\} \right]$$

und durch Umformung des zweiten Summanden

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \mathcal{E} \left\{ f(x) \cdot \frac{x-m_x}{\sigma_x} H_{n-1} \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right) \right\} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot c_{n-2} \quad (6.5)$$

für $n \geq 2$.

Damit ist eine halbrekursive Darstellung gegeben. Es bleibt jedoch dem konkreten Beispiel überlassen, ob diese Beziehung der ursprünglichen Formel (5.17) vorzuziehen ist.

6.2 DIE APPROXIMATION BEI POTENZKENNLINIEN

Bei der Approximation von in Polynomform gegebenen Kennlinien genügt es wegen der Linearitätseigenschaft der Minimallösung offensichtlich, den Fall $y=x^N$ zu betrachten. Wird nun der Approximationsansatz (5.16) bis zum Grad N ausgedehnt, so erhält man eine exakte Darstellung der Kennlinie in Form einer Summe von HERMITE-Polynomen. Im allgemeinen wird man sich jedoch, je nach gewünschter Approximationsgüte, mit weniger Koeffizienten begnügen.

Gesucht wird somit die Darstellung:

$$x^N \equiv y_N = \sum_{v=0}^N c_{N,v} \frac{H_v\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)}{\sqrt{v!}} \quad (6.6)$$

Zunächst folgt für die Koeffizienten $c_{N,v}$ durch Anwendung der Formel

$$(6.3) \quad c_{N,v} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{v!}} N \mathcal{E}\left\{x^{N-1} \cdot H_{v-1}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\right\},$$

also

$$c_{N,v} = \sigma_x \frac{N}{\sqrt{v}} c_{N-1,v-1} \quad \text{für } v \leq N \quad (6.7)$$

Die wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel ergibt

$$c_{N,v} = \sigma_x^v \binom{N}{v} \sqrt{v!} c_{N-v,0}$$

Wegen $H_0(u) = 1$ folgt $c_{N-v,0} = \mathcal{E}\{x^{N-v}\} := m_{N-v}$ und

daher

$$c_{N,v} = \sqrt{v!} \binom{N}{v} \sigma_x^v m_{N-v} \quad \text{für } v \leq N \quad (6.8)$$

Selbstverständlich ergibt sich diese Beziehung auch durch Ausnutzung von (6.2) für $k=n$. Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten erfordert gemäß (6.8) die Kenntnis der Nullmomente des Eingangsgerausches.

Mit der binomischen Formel lassen sich diese Momente m_k , $k \leq N$ durch die auf den linearen Mittelwert bezogenen Zentralmomente $\mu_v := \mathcal{E}\{(x-m_x)^v\}$ ausdrücken:

$$m_k = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \mu_v \cdot m_x^{k-v} \quad (6.9)$$

Wegen der vorausgesetzten GAUSS-Verteilung können die Zentralmomente durch die Streuung dargestellt werden [26]:

$$\mu_v = \begin{cases} \sigma_x^v \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (v-1) & \text{für: } v \text{ gerade} \\ 0 & \text{für: } v \text{ ungerade} \end{cases} \quad (6.10)$$

$n \backslash \nu$		$m_x^{n-\nu} \tilde{\sigma}_x$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_n	1	1										
	2	1	0	1								
	3	1	0	3								
	4	1	0	6	0	3						
	5	1	0	10	0	15						
	6	1	0	15	0	45	0	15				
	7	1	0	21	0	105	0	105				
	8	1	0	28	0	210	0	420	0	105		
	9	1	0	36	0	378	0	1260	0	945		
	10	1	0	45	0	630	0	3150	0	4725	0	945

Tabelle 6.1: Nullmomente in Abhängigkeit von m_x und $\tilde{\sigma}_x$

Beispiel: $m_6 = m_x^6 + 15 m_x^4 \tilde{\sigma}_x^2 + 45 m_x^2 \tilde{\sigma}_x^4 + 15 \tilde{\sigma}_x^6$

$N \backslash \nu$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1										
2	1	0	1									
3	0	3	0	1								
4	3	0	6	0	1							
5	0	15	0	10	0	1						
6	15	0	45	0	15	0	1					
7	0	105	0	105	0	21	0	1				
8	105	0	420	0	210	0	28	0	1			
9	0	945	0	1260	0	378	0	36	0	1		
10	945	0	4725	0	3150	0	630	0	45	0	1	

Tabelle 6.2: Entwicklungskoeffizienten $\tilde{c}_{N,\nu} / \tilde{\sigma}_x^N$ für

$$u^N = \sum_{\nu=0}^N \tilde{c}_{N,\nu} H_{\nu}\left(\frac{u}{\tilde{\sigma}_x}\right) \quad , \quad \tilde{c}_{N,\nu} = c_{N,\nu} \frac{N!}{\nu!}$$

Beispiel: $u^6 = 15 H_0(u) + 45 H_2(u) + 15 H_4(u) + H_6(u)$

Dann folgt

$$\begin{aligned} m_x &= \sum_{i=0}^{[k/2]} \binom{k}{2i} \bar{G}_x^{2i} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2i-1) m_x^{k-2i} \\ &= k! \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{\bar{G}_x^{2i} m_x^{k-2i}}{2^i i! (k-2i)!} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Aufgrund dieser Beziehung ist dann auch der Zusammenhang zwischen den Entwicklungskoeffizienten $c_{N,\nu}$ und den Kenngrößen m_x und $\bar{G}_x$ der Eingangsverteilung hergestellt.

Eine beträchtliche Vereinfachung ergibt sich bei verschwindendem linearem Mittelwert. Es sei also $m_x \equiv 0$. Wegen $m_k \equiv \mu_k$ ist folglich $m_k = 0$ für $k=1,3,5,\dots$, so daß wegen (6.8) $c_{N,\nu} = 0$ für ungerade Differenzen $N-\nu$ wird. Das ist aber der Fall, wenn entweder ν ungerade, N gerade oder aber ν gerade, N ungerade ist. Man erhält somit nach leichter Umformung

$$c_{N,\nu} = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } N-\nu \text{ ungerade} \\ \bar{G}_x^N \frac{N!}{\sqrt{\nu}! 2^{\frac{N-\nu}{2}} (\frac{N-\nu}{2})!} & , \text{ wenn } N-\nu \text{ gerade.} \end{cases} \quad (6.12)$$

In der Tabelle 6.2 finden sich diese Koeffizienten in der Form

$$\tilde{c}_{N,\nu} := \frac{c_{N,\nu}}{\sqrt{\nu}!}.$$

Die erhaltenen Ergebnisse sollen benutzt werden, um für eine vorliegende Polynomkennlinie

$$f(u) = \sum_{i=0}^M d_i u^i \quad (6.13)$$

die HERMITE-Entwicklung anzugeben. Einsetzen von

$$u^i = \sum_{\nu=0}^i c_{i,\nu} \frac{H_\nu\left(\frac{u-m_x}{\bar{G}_x}\right)}{\sqrt{\nu}!} \quad \text{ergibt}$$

$$f(u) = \sum_{i=0}^M \sum_{\nu=0}^i d_i c_{i,\nu} \frac{H_\nu\left(\frac{u-m_x}{\bar{G}_x}\right)}{\sqrt{\nu}!}$$

Durch Umsummierung folgt

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^M \left(\sum_{\mu=\nu}^M d_\mu c_{\mu,\nu} \right) \frac{H_\nu\left(\frac{u-m_x}{\bar{G}_x}\right)}{\sqrt{\nu}!},$$

so daß aus dem Vergleich mit $g_M(u) = \sum_{\nu=0}^M c_\nu \cdot \frac{H_\nu(\cdot)}{\sqrt{\nu}!}$ für c_ν der Zusammenhang

$$c_\nu = \sum_{\mu=\nu}^M d_\mu c_{\mu,\nu} \quad (6.14)$$

zu entnehmen ist.

Es sei speziell $f(u) = d_1 u + d_3 u^3 + d_5 u^5 + d_7 u^7$ und es werde der mittelwertfreie Fall betrachtet. Mit den in Tabelle 6.1 angegebenen Werten für die $c_{\mu,\nu}$ lauten dann die Koeffizienten c_ν der Summe von HERMITE-Polynomen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{c}_x d_1 + 3 \bar{c}_x^3 d_3 + 15 \bar{c}_x^5 d_5 + 105 \bar{c}_x^7 d_7 \\ c_3 &= 3! \left[\bar{c}_x^3 d_3 + 10 \bar{c}_x^5 d_5 + 105 \bar{c}_x^7 d_7 \right] \\ c_5 &= 5! \left[\bar{c}_x^5 d_5 + 21 \bar{c}_x^7 d_7 \right] \\ c_7 &= 7! \bar{c}_x^7 d_7 \\ c_0 &= c_2 = c_4 = c_6 = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Es werden noch zwei Spezialfälle betrachtet, wobei dem Approximationsfehler besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden soll. Für diesen gilt nach Abschnitt 5.1

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varepsilon_n}^2 &:= \mathbb{E}\{(y - \bar{y}_n)^2\} = \mathbb{E}\{y^2\} - \mathbb{E}\{\bar{y}_n^2\} \\ &= \mathbb{E}\{y^2\} - \sum_{\nu=0}^n c_\nu \bar{c}_x^\nu \end{aligned} \quad (6.16)$$

Es sei zunächst $\bar{y} = \bar{x}^3$. Aus den vorstehenden Aussagen folgt dann sofort

$$\begin{aligned} c_{3,0} &= 3 \bar{c}_x^2 m_x + m_x^3 \equiv m_3 & c_{3,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 6 \bar{c}_x^2 m_x \\ c_{3,1} &= 3 \bar{c}_x^3 m_x + 3 \bar{c}_x m_x^2 & c_{3,3} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 6 \bar{c}_x^3 \\ c_{3,k} &= 0 \quad \text{für } k > 3 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Bei verschwindendem linearem Mittelwert sieht man sofort, daß nur eine Approximation erster Ordnung möglich ist. Ist dagegen $m_x \neq 0$, so bringt die Hinzunahme von $c_{3,2}$ eine Verbesserung des Approximationsfehlers um $c_{3,2}^2 = 9 \bar{c}_x^4 m_x^2$. Wegen $\mathbb{E}\{y^2\} = \mathbb{E}\{x^6\} \equiv m_6$ ergibt sich für den Approximationsfehler im einzelnen:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varepsilon_0}^2 &:= \mathbb{E}\{y^2\} - c_{3,0}^2 = 15 \bar{c}_x^6 + 36 m_x^2 \cdot \bar{c}_x^4 + 9 m_x^4 \cdot \bar{c}_x^2 \\ \bar{\sigma}_{\varepsilon_1}^2 &:= \mathbb{E}\{y^2\} - (c_{3,0}^2 + c_{3,1}^2) = 6 \bar{c}_x^6 + 18 m_x^2 \cdot \bar{c}_x^4 \\ \bar{\sigma}_{\varepsilon_2}^2 &:= \mathbb{E}\{y^2\} - (c_{3,0}^2 + c_{3,1}^2 + c_{3,2}^2) = 6 \bar{c}_x^6 \\ \bar{\sigma}_{\varepsilon_3}^2 &:= \mathbb{E}\{y^2\} - (c_{3,0}^2 + c_{3,1}^2 + c_{3,2}^2 + c_{3,3}^2) = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Es sei nun $y=x^5$. Die Koeffizienten der Reihenentwicklung bestimmen sich zu:

$$\begin{aligned} c_{5,0} &= 15m_x \tilde{\sigma}_x^4 + 10m_x^3 \tilde{\sigma}_x^2 + m_x^5 & c_{5,3} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (60 \tilde{\sigma}_x^5 + 60 m_x^2 \cdot \tilde{\sigma}_x^3) \\ c_{5,1} &= 15 \tilde{\sigma}_x^5 + 30 m_x^2 \tilde{\sigma}_x^3 + 5 m_x^4 \tilde{\sigma}_x & c_{5,4} &= \frac{1}{\sqrt{24}} 120 m_x \tilde{\sigma}_x^4 \\ c_{5,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (60 m_x \tilde{\sigma}_x^4 + 20 m_x^3 \tilde{\sigma}_x^2) & c_{5,5} &= \frac{1}{\sqrt{120}} 120 \tilde{\sigma}_x^5 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Damit folgt für die Varianz des Fehlers

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_0}^2 = 945 \tilde{\sigma}_x^{10} + 4500 m_x^2 \tilde{\sigma}_x^8 + 2850 m_x^4 \tilde{\sigma}_x^6 + 500 m_x^6 \tilde{\sigma}_x^4 + 25 m_x^8 \tilde{\sigma}_x^2 \quad (= \tilde{\sigma}_y^2)$$

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_1}^2 = 720 \tilde{\sigma}_x^{10} + 3600 m_x^2 \tilde{\sigma}_x^8 + 1800 m_x^4 \tilde{\sigma}_x^6 + 200 m_x^6 \tilde{\sigma}_x^4$$

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_2}^2 = 720 \tilde{\sigma}_x^{10} + 1800 m_x^2 \tilde{\sigma}_x^8 + 600 m_x^4 \tilde{\sigma}_x^6$$

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_3}^2 = 120 \tilde{\sigma}_x^{10} + 600 m_x^2 \tilde{\sigma}_x^8 \quad \Bigg| \quad \tilde{\sigma}_{\epsilon_4}^2 = 120 \cdot \tilde{\sigma}_x^{10} \quad (6.19a)$$

Bild 6.1 zeigt eine Darstellung der bezogenen Fehler $\Delta_n := \frac{\mathbb{E}\{y^2\} - \mathbb{E}\{\tilde{y}_n^2\}}{\mathbb{E}\{y^2\}}$ in Abhängigkeit von $\tilde{\sigma}_x$ für $m_x = 0$ und $m_x = 1$.

Δ_1 resultiert dabei aus der ersatzweisen Beschreibung der Nichtlinearität durch die äquivalente Verstärkung. Bei Hinzunahme von Gliedern c_2 bzw. im mittelwertfreien Fall c_3 ist ein deutlicher Gewinn für die Approximation festzustellen. Im mittelwertfreien Fall ergibt sich so eine Reduzierung des Fehlers von 76.6% auf 12.7%.

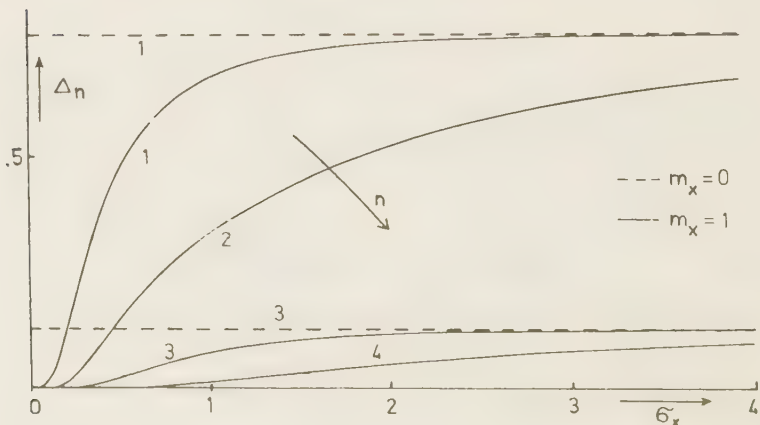


Bild 6.1

6.3 STÜCKWEISE LINEARE KENNLINIEN

Bei stückweise aus Geradenabschnitten zusammengesetzten Kennlinien wie etwa einem Begrenzer oder einer Ansprechempfindlichkeit bietet sich zur Bestimmung der Koeffizienten c_n die Beziehung (6.2) an. Zu besonders einfachen Verhältnissen gelangt man, wenn die Kennlinienfunktion im Sinne der Distributionentheorie verstanden wird und die Differentiation folglich auf δ -Distributionen führt. Im folgenden soll für die Koeffizienten von einfachen Grundtypen der genannten Kennlinien jeweils ein spezifischer Ausdruck hergeleitet werden, der eine einfach zu handhabende Rechenvorschrift liefert.

Zunächst wird ein symmetrischer Zweipunktschalter betrachtet. Die Koeffizienten sollen hier durch direkte Auswertung der Definitionsgleichung (5.17) bestimmt werden. Entsprechend der Kennlinienfunktion $v = h \cdot \text{sgn}(u)$ hat die bei der Erwartungswertbildung durchzuführende Integration bereichsweise für $-\infty < u \leq 0$ und $0 \leq u < \infty$ zu erfolgen, so daß für die c_n folgt:

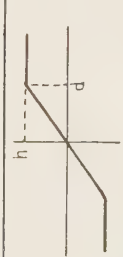
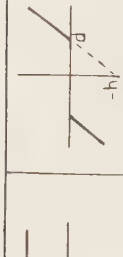
$$\begin{aligned} \sqrt{n!} \, c_n &= \mathcal{E} \left\{ f(x) \cdot H_n \left[\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right] \right\} \\ &= -r \cdot \int_{-\infty}^0 u \, H_n \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(u - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} du + h \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(u - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} du \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{-\infty}^{-m_x/\sigma_x} H_n(v) e^{-v^2/2} dv + \int_{-m_x/\sigma_x}^{\infty} H_n(v) e^{-v^2/2} dv \right] \end{aligned}$$

Wird hier $H_n(v)$ durch die RODRIGUES-Formel dargestellt, so fällt der von der Verteilungsdichte herrührende Exponentialterm heraus und es bleibt

$$\begin{aligned} \sqrt{n!} \, c_n &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[(-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{-m_x/\sigma_x} \frac{d^n}{dv^n} e^{-v^2/2} dv + (-1)^n \int_{-m_x/\sigma_x}^{\infty} \frac{d^n}{dv^n} e^{-v^2/2} dv \right] \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[(-1)^{n+1} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} e^{-v^2/2} \Big|_{v=-\frac{m_x}{\sigma_x}} + (-1)^{n+1} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} e^{-v^2/2} \Big|_{v=-\frac{m_x}{\sigma_x}} \right] \\ &= \frac{2h}{\sqrt{2\pi}} (-1)^{n+1} \left[(-1)^{n-1} e^{\frac{1}{2} \left(-\frac{m_x}{\sigma_x} \right)^2} \frac{d^{n-1}}{d \left(-\frac{m_x}{\sigma_x} \right)} e^{-\frac{1}{2} \left(-\frac{m_x}{\sigma_x} \right)^2} \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right)^2} \end{aligned}$$

Der Ausdruck [] ist identisch mit $H_{n-1} \left(-\frac{m_x}{\sigma_x} \right)$. Also ergibt sich wegen $H_n(-u) = (-1)^n H_n(u)$ schließlich

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(-1)^{n-1} 2h}{\sqrt{n!} \sqrt{2\pi}} H_{n-1} \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right)^2}, \quad n \geq 1 \quad (6.20a) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n!}} c_1 \cdot H_{n-1} \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) \end{aligned}$$

				
c_0	$h \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)$	$\frac{h}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right) \right\}$	$\frac{h\tilde{\sigma}}{2} \left\{ z_1 \operatorname{erf}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(e^{-z_1^2/2} - e^{-z_2^2/2} \right) \right\}$	$h\tilde{\sigma} - c_0 \operatorname{Begr.}$
c_1	$\frac{2h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2}$	$\frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-z_1^2/2} + e^{-z_2^2/2} \right\}$	$\frac{h\tilde{\sigma}}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right) \right\}$	$h\tilde{\sigma} - c_1 \operatorname{Begr.}$
c_2	$-\frac{h}{\sqrt{\pi}} \frac{m_x}{\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2}$	$\frac{h}{2\sqrt{\pi}} \left\{ z_1 e^{-z_1^2/2} - z_2 e^{-z_2^2/2} \right\}$	$\frac{h\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-z_1^2/2} - e^{-z_2^2/2} \right\}$	$-c_2 \operatorname{Begr.}$
c_3	$\frac{h}{\sqrt{3\pi}} \left\{ \left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 1 \right\} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2}$	$\frac{h}{2\sqrt{3\pi}} \left\{ z_1^2 e^{-z_1^2/2} + z_2^2 e^{-z_2^2/2} \right\} - \frac{c_1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{h\tilde{\sigma}}{2\sqrt{3\pi}} \left\{ z_1 e^{-z_1^2/2} + z_2 e^{-z_2^2/2} \right\}$	$-c_3 \operatorname{Begr.}$
c_4	$-\frac{h}{2\sqrt{3\pi}} \left\{ \left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^3 - 3\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) \right\} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2}$	$\frac{h}{4\sqrt{3\pi}} \left\{ z_1^3 e^{-z_1^2/2} - z_2^3 e^{-z_2^2/2} \right\} - \frac{\sqrt{3}}{2} c_2$	$\frac{h\tilde{\sigma}}{4\sqrt{3\pi}} \left\{ (z_1^2 - 1) e^{-z_1^2/2} - (z_2^2 - 1) e^{-z_2^2/2} \right\}$	$-c_4 \operatorname{Begr.}$
c_5	$\frac{h}{2\sqrt{15\pi}} \left\{ \left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^4 - 6\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 3 \right\} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2}$	$\frac{h}{4\sqrt{15\pi}} \left\{ z_1^4 e^{-z_1^2/2} + z_2^4 e^{-z_2^2/2} \right\} - \frac{3}{10} c_3 - \frac{3}{2\sqrt{30}} c_1$	$-\frac{h\tilde{\sigma}}{4\sqrt{15\pi}} \left\{ (z_1^3 - 3z_1) e^{-z_1^2/2} + (z_2^3 - 3z_2) e^{-z_2^2/2} \right\}$	$-c_5 \operatorname{Begr.}$

$$z_1 := \frac{d+m_x}{\tilde{\sigma}_x} \quad z_2 := \frac{d-m_x}{\tilde{\sigma}_x} \quad \tilde{\sigma} := \sigma\sqrt{d} \quad \tilde{m} := m\sqrt{d}$$

Tabelle 6.3

Ein offensichtlicher Vorteil dieser Darstellung ist die erhebliche Verringerung des notwendigen Programmieraufwandes, zumal die Polynome $H_n(u)$ in Form von Unterprogrammen abgespeichert werden können.

Im Fall $m_x \neq 0$ folgt mit $H_{2k+1}(0) = 0$ und $H_{2k}(0) = (-1)^k 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ noch wegen $c_1 = \frac{2h}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\begin{aligned} c_{2k} &= 0, \\ c_{2k+1} &= \frac{(-1)^k \sqrt{(2k+1)!}}{(2k+1) 2^k k!} \frac{2h}{\sqrt{2\pi}}, \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (6.20b)$$

Die Koeffizienten sind im mittelwertfreien Fall somit unabhängig von der Streuung σ_x . Dies bedeutet jedoch keine Unabhängigkeit der Approximation von σ_x .

Aus (6.20a) folgt weiter, daß sich das Vorhandensein eines linearen Mittelwertes hauptsächlich bei kleineren Streuungen des Eingangsprozesses der Nichtlinearität bemerkbar macht, denn es gilt

$$\lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} c_n|_{m_x \neq 0} = c_n|_{m_x=0} \quad (6.21)$$

Bei der Darstellung der Fehler empfiehlt es sich, nicht die auf $\{y^2\}$ sondern die auf σ_y^2 bezogenen Fehler zu betrachten. Wegen $\{y^2\} - \{\bar{y}_n^2\} = \sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}_n}^2$ ergibt sich dann gerade für den relativen Fehler

$$\Delta_n := \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}_n}^2}{\sigma_y^2} \quad (6.22)$$

im Grenzfall $\sigma_x \rightarrow \infty$ der mittelwertfreie Fall. Die dafür notwendige Varianz bestimmt sich wegen $\{y^2\} = h^2$ (unabhängig von σ_x und m_x !) und $m_y = c_0 = h \cdot \text{erf}\left(\frac{m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)$ zu

$$\sigma_y^2 = h^2 \left[1 - \text{erf}^2\left(\frac{m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \right] \quad (6.23)$$

Hier ist $\text{erf}(u)$ das durch

$$\text{erf}(u) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv \quad (6.24a)$$

definierte Fehlerintegral mit dem in Bild 6.2 gezeigten graphischen Verlauf. Die numerische Auswertung dieses Integrals erfolgt zweckmäßigerweise durch eine sich durch hohe Genauigkeit auszeichnende Approximation der Form

$$\text{erf}(u) \approx 1 - [a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots + a_5 \eta^5] \text{erf}'(u) \quad (6.24b)$$

$$\text{mit} \quad \eta = \frac{1}{1 + a_0 u},$$

wo die Werte $a_0, a_1, \dots, a_5$ bei HASTINGS [27] zu finden sind.

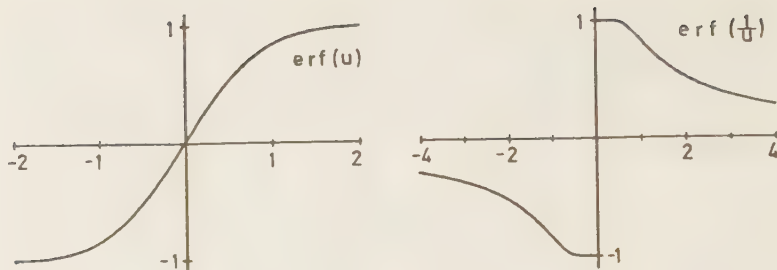


Bild 6.2

Bild 6.3 zeigt den Verlauf von σ_y^2 für verschiedene Mittelwerte m_x . Aus dieser Darstellung wie aus der Beziehung (6.23) wird deutlich, daß der lineare Mittelwert nur eine Dehnung des Kurvenverlaufes in Abzissenrichtung bewirkt. Dies gilt wegen (6.20a) auch für σ_y^2 , so daß für die Graphen dieser Varianzen nur der normierte Fall $m_x^n = 1$ betrachtet zu werden braucht (Bild 6.4). Der durch (6.22) definierte relative Approximationsfehler Δ_n ist in Bild 6.5 aufgetragen. Es wird deutlich, daß die Approximationen der Ordnung $2k$ gegenüber denen der Ordnung $2k-1$ nur bei kleineren Streuungen eine merkbare Verbesserung bringen. In Bild 6.4, deutlicher aber noch in Bild 6.5, sind für zwei aufeinanderfolgende Kurvenverläufe gemeinsame Berührungspunkte festzustellen. Eine Erklärung dieses Verhaltens ergibt sich aus dem Zusammenhang $\sigma_{\bar{y}_n}^2 = \sigma_{\bar{y}_{n-1}}^2 + c_n^2$. Wegen (6.20a) wird c_n Null, wenn m_x/σ_x mit einer Nullstelle des HERMITE-Polynoms $H_{n-1}(u)$ zusammenfällt. In diesem Fall gilt somit $\sigma_{\bar{y}_n}^2 = \sigma_{\bar{y}_{n-1}}^2$. Wegen der Trennungseigenschaften der Nullstellen der HERMITE-Polynome muß dann aber durch die Hinzunahme von c_{n+1} eine spürbare Verbesserung erfolgen. Ein Maß für die Genauigkeitssteigerung der Approximation ergibt sich aus dem Vergleich zweier aufeinander folgender absoluter Fehler:

$$\begin{aligned} (\sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}_{n-1}}^2) - (\sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}_n}^2) &= \sigma_{\bar{y}_n}^2 - \sigma_{\bar{y}_{n-1}}^2 \\ &= c_n^2 \end{aligned}$$

Die relative Verbesserung, die durch die Hinzunahme von c_n bewirkt wird, ist dann durch

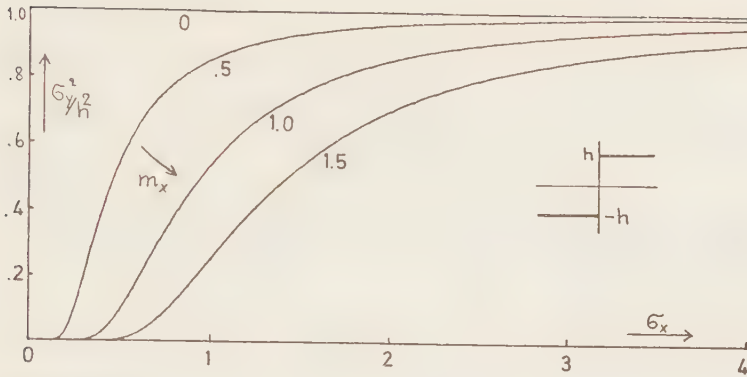


Bild 6.3

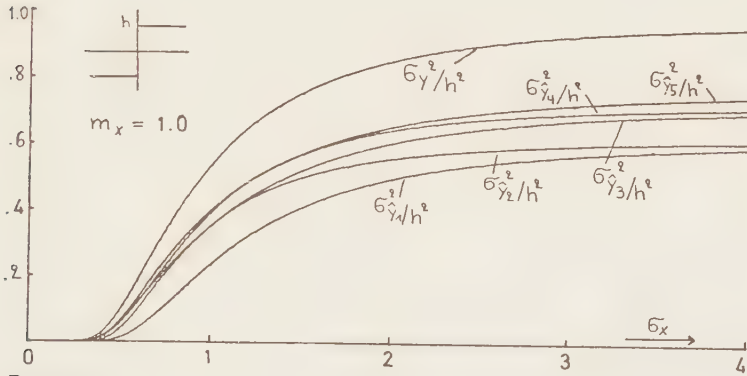


Bild 6.4

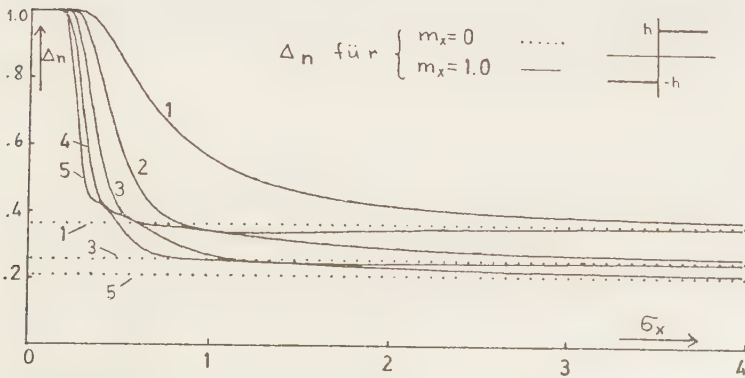


Bild 6.5

$$\delta_n = \frac{c_n^2}{6_y^2 - 6_y^2_{n-1}} \quad (6.25a)$$

gegeben. Man erhält sofort den Zusammenhang

$$\delta_n = \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad (6.25b)$$

Die graphischen Darstellungen dieser Genauigkeitszuwächse findet man für $m_x=0$ und $m_x=1$ in Bild 6.6.

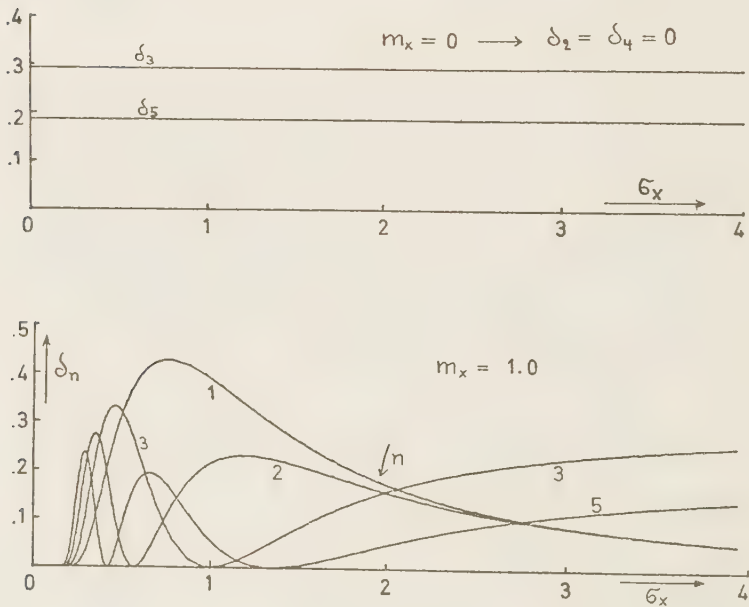


Bild 6.6

Als weiteres Beispiel soll ein Dreipunktschalter gemäß Bild 6.7 betrachtet werden. Auch hier kann wie bei dem Beispiel des Zweipunktschalters für die Koeffizienten c_n eine Darstellung angegeben werden, die einen expliziten Zusammenhang mit den HERMITESchen Entwicklungspolynomen



herstellt. Man erhält als Ergebnis

Bild 6.7

$$c_n = \frac{h}{\sqrt{n!} \sqrt{2\pi}} \left\{ H_{n-1} \left(\frac{d-m_x}{\sigma_x} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d-m_x}{\sigma_x} \right)^2} + (-1)^{n-1} H_{n-1} \left(\frac{d+m_x}{\sigma_x} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d+m_x}{\sigma_x} \right)^2} \right\}$$

für $n \geq 1$ (6.26a)

c_0 muß wiederum gesondert bestimmt werden. Bei mittelwertlosem Eingangsprozeß der Nichtlinearität folgt aus (6.26a) wegen $H_n(-u) = (-1)^n H_n(u)$ als Spezialfall

$$c_n = \begin{cases} \frac{2h}{\sqrt{n!} \sqrt{2\pi}} H_{n-1} \left(\frac{d}{\sigma_x} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{\sigma_x} \right)^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (6.26b)$$

Aus (6.26a) ergibt sich ferner in Übereinstimmung mit der Anschauung für $d=0$ der bereits für den Zweipunktschalter ermittelte Ausdruck für c_n . Wird das Verhalten von (6.26a) für große σ_x betrachtet, so wird

$$\lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} c_n = \begin{cases} \frac{2h}{\sqrt{n!} \sqrt{2\pi}} H_{n-1}(0) & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases} \quad (6.27)$$

Der Einfluß des linearen Mittelwertes auf die Koeffizienten und damit auf die Approximationsgüte verschwindet also auch hier bei zunehmenden Streuungswerten. Der Vergleich des Grenzwertes (6.27) mit der entsprechenden Beziehung (6.22) des Zweipunktschalters zeigt, daß bei hinreichend großen Eingangsstreuungen die Approximationen von Zwei- und Dreipunktschalter bezüglich ihrer Varianzen annähernd übereinstimmen. Diese Aussage mußte erwartet werden, da sie auch für die Kennlinien selbst gilt. Zur Erklärung bedenke man, daß bei wachsender Streuung σ_x hohe Amplitudenwerte des Eingangssignals mit größer werdender Wahrscheinlichkeit auftreten.

Die Varianz σ_y^2 ergibt sich aus

$$\mathbb{E}\{y^2\} = h^2 \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d+m_x}{\sigma_x} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d-m_x}{\sigma_x} \right) \right]$$

und

$$m_y = \frac{h}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d+m_x}{\sqrt{2} \sigma_x} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{d-m_x}{\sqrt{2} \sigma_x} \right) \right] \quad (6.28)$$

und ist im Bild 6.8 für verschiedene Mittelwerte m_x dargestellt. Bild 6.9a zeigt die Varianz $\sigma_{y1}^2 = c_1^2$ am Ausgang eines quasilinearen Ersatzsystems, in Bild 6.9b ist zum Vergleich die Varianz $\sigma_{y5}^2 = c_1^2 + \dots + c_5^2$ aufgetragen. Deutlicher wird der Unterschied zwischen den einzelnen Approximationen, wenn der relative Fehler Δ_n herangezogen wird. Faßt man in den Bildern 6.10a bis 6.10d den Bereich $1 \leq \sigma_x/d \leq 3$ ins Auge, so ist eine merkbare Approximationsverbesserung für zunehmenden linearen Mittelwert festzustellen, wenn für das Ersatzsystem auch c_2 berücksichtigt wird. Die Grenzwerte, gegen die die Fehler für wachsende Streuung σ_x streben, sind nach (6.27) unabhängig von m_x und berechnen sich zu

$$\lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} \Delta_1 = \lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} \Delta_2 = 36.3 \%$$

$$\lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} \Delta_3 = \lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} \Delta_4 = 25.7 \%$$

$$\lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} \Delta_5 = \lim_{\sigma_x \rightarrow \infty} \Delta_6 = 20.9 \%$$

Noch augenscheinlicher wird der Unterschied zwischen den einzelnen Approximationen, wenn die durch die Koeffizienten c_n bewirkte Genauigkeitssteigerung δ_n -Bilder 6.11a,b,c,d - betrachtet wird.

Zum Abschluß dieses Beispiels soll noch auf den Einfluß der Kennlinienparameter h und d auf die graphischen Darstellungen eingegangen werden. Der Parameter d bewirkt eine Normierung der Abszisse σ_x und des linearen Mittelwertes m_x . Die Schwelle h geht sowohl bei σ_y^2 wie auch bei σ_{yn}^2 nur als Faktor ein. Die relativen Approximationsfehler Δ_n sind daher zwar unabhängig von h , nicht aber von d . Bild 6.12 zeigt diese Abhängigkeit, wobei der Einfachheit halber $m_x=0$ gewählt wurde.

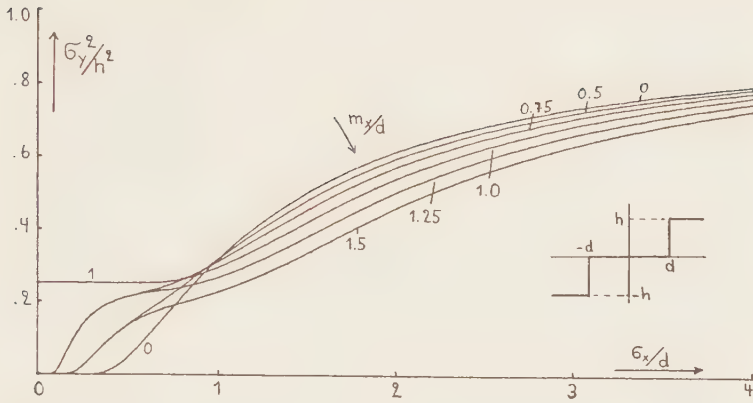


Bild 6.8

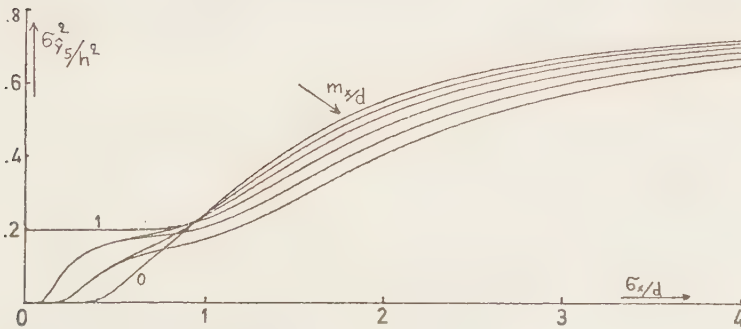
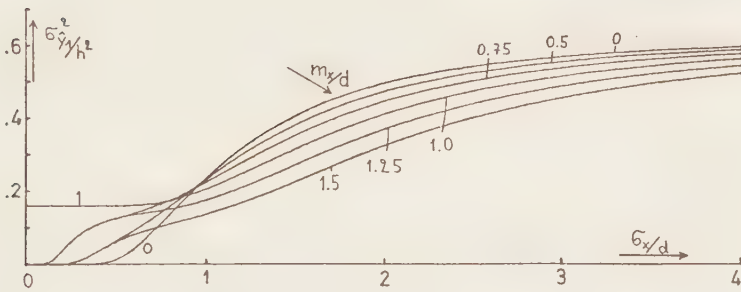


Bild 6.9 a,b

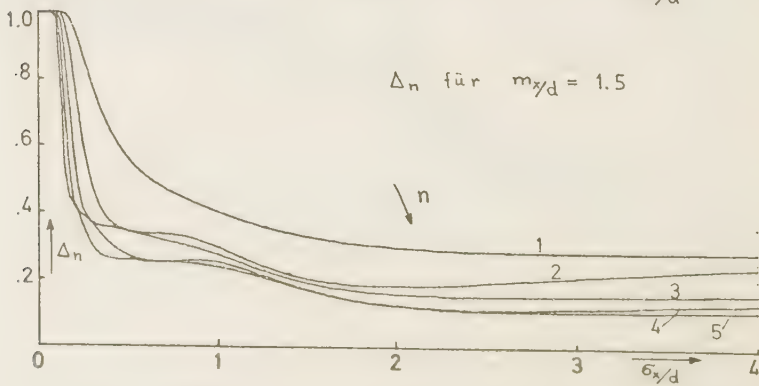
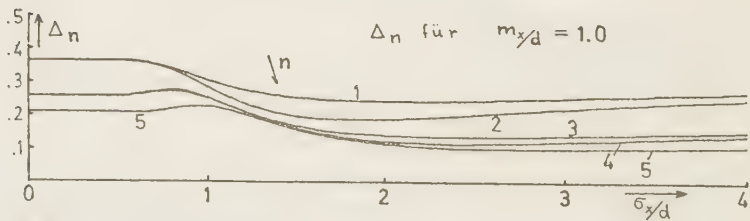
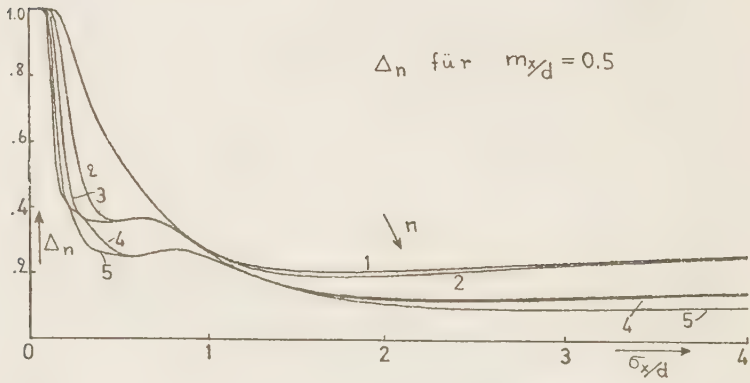
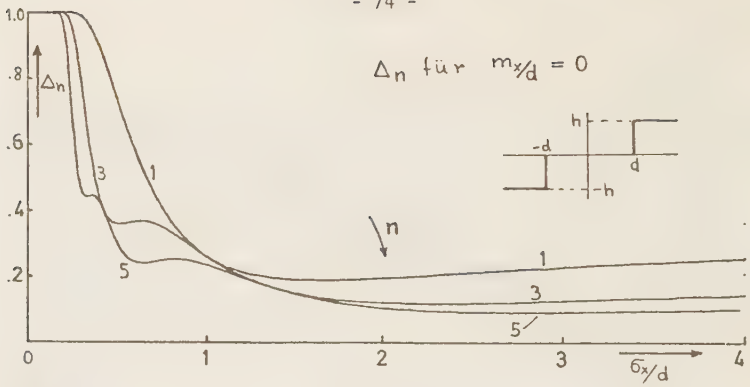


Bild 6.10 a,b,c,d

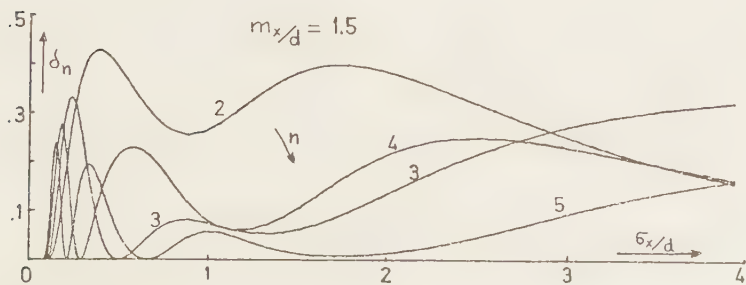
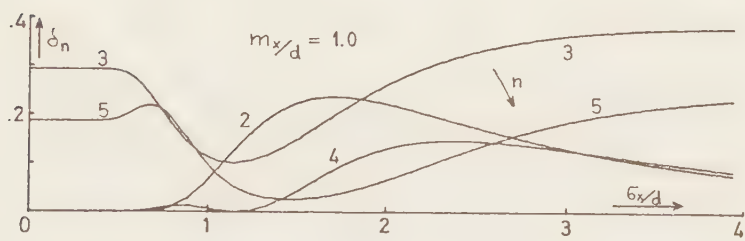
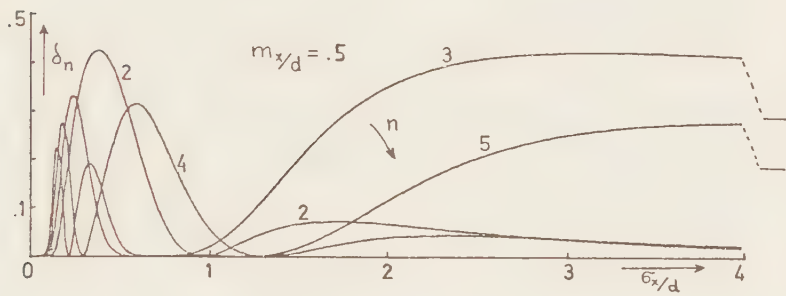
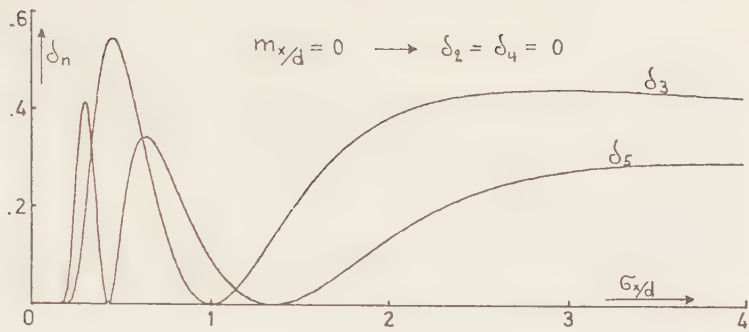


Bild 6.11 a,b,c,d

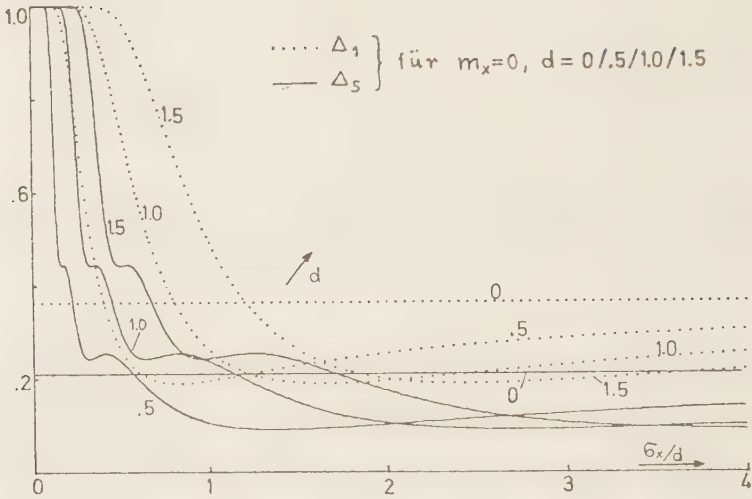


Bild 6.12

Während sich bei den bisherigen Beispielen das Auffinden eines expliziten Zusammenhanges zwischen Entwicklungskoeffizienten und HERMITE-Polynomen auch ohne die Beziehung (6.2) als verhältnismäßig einfach erwies, wird die entsprechende Herleitung bei einem symmetrischen Begrenzer bereits erheblich langwieriger. Dagegen gelangt man mit Hilfe der Glg

(6.2) sehr schnell zu dem gewünschten Ergebnis. Da die erste Ableitung der Kennlinienfunktion $f(u)$ bei $u=\pm d$ jeweils einen Sprung macht, gilt zunächst

$$\frac{d^2 f(u)}{du^2} = \frac{h}{d} [\delta(u+d) - \delta(u-d)],$$

so daß bei der Auswertung

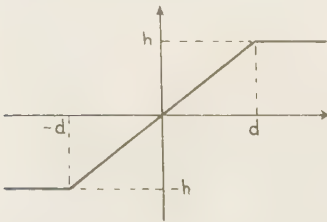


Bild 6.13

der Bestimmungsgleichung für die Begrenzerkoeffizienten

$$c_n = \frac{\tilde{\sigma}_x^2}{n!} \mathfrak{L} \left\{ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} H_{n-2} \left(\frac{x - m_x}{\tilde{\sigma}_x} \right) \right\}$$

die Integration unmittelbar mit Hilfe der Ausblendeigenschaft der δ -Distribution durchgeführt werden kann. Mit

$$H_{n-2} \left(-\frac{d+m_x}{\tilde{\sigma}_x} \right) = (-1)^{n-2} H_{n-2} \left(\frac{d-m_x}{\tilde{\sigma}_x} \right)$$

folgt dann sofort das Endresultat:

$$c_n = \frac{h \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n!}} d \left[(-1)^{n-2} H_{n-2} \left(\frac{d+m_x}{\tilde{\sigma}_x} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d+m_x}{\tilde{\sigma}_x} \right)^2} - H_{n-2} \left(\frac{d-m_x}{\tilde{\sigma}_x} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d-m_x}{\tilde{\sigma}_x} \right)^2} \right]$$

für $n \geq 2$. (6.29a)

Um den vollständigen Koeffizientensatz zu erhalten, müssen hier also bereits die Koeffizienten c_0 und c_1 gesondert berechnet werden (Tabelle 6.3). Für $m_x=0$ ergibt sich speziell

$$c_n|_{m_x=0} = -\frac{2h \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n!}} d e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{\tilde{\sigma}_x} \right)^2} H_{n-2} \left(\frac{d}{\tilde{\sigma}_x} \right) = \frac{\sqrt{6} \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n!}} d \cdot C_3|_{m_x=0} \cdot H_{n-2} \left(\frac{d}{\tilde{\sigma}_x} \right) \quad (6.29b)$$

Der quadratische Mittelwert am Begrenzerausgang ergibt sich zu

$$\mathfrak{L}\{y^2\} = \frac{h^2 \tilde{\sigma}_x^2}{2 d^2} \left\{ \left(1 + \frac{m_x^2 - d^2}{\tilde{\sigma}_x^2} \right) \left[\operatorname{erf} \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}} \right) \right] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[z_2 e^{-\frac{z_1^2}{2}} + z_1 e^{-\frac{z_2^2}{2}} \right] \right\} + h^2 \quad (6.30)$$

$$\text{bzw. } \mathfrak{L}\{y^2\} = h^2 \left\{ \frac{\tilde{\sigma}_x^2 - d^2}{d^2} \operatorname{erf} \left(\frac{d}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_x} \right) - \frac{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n!}} d e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{\tilde{\sigma}_x} \right)^2} + 1 \right\} \quad \text{für } m_x = 0.$$

Für die graphischen Darstellungen wird der Einfachheit halber nur der mittelwertfreie Fall betrachtet. Bild 6.14 stellt die Varianz des Begrenzerausgangs den Varianzen $\tilde{\sigma}_{\tilde{y}}^2$ der nichtlinearen Ersatzsysteme gegenüber, wobei die Approximationⁿ auf $\tilde{y}_7$ ausgedehnt wurde. Die Abbildung 6.15 verdeutlicht die Verbesserung der Näherungen beim Übergang von $\tilde{y}_n$ auf $\tilde{y}_{n+1}$. Es gilt ja

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{y}_n}^2 - \tilde{\sigma}_{\tilde{y}_{n-1}}^2 \equiv [\tilde{\sigma}_y^2 - \tilde{\sigma}_{\tilde{y}_{n-1}}^2] - [\tilde{\sigma}_y^2 - \tilde{\sigma}_{\tilde{y}_n}^2] = c_n^2$$

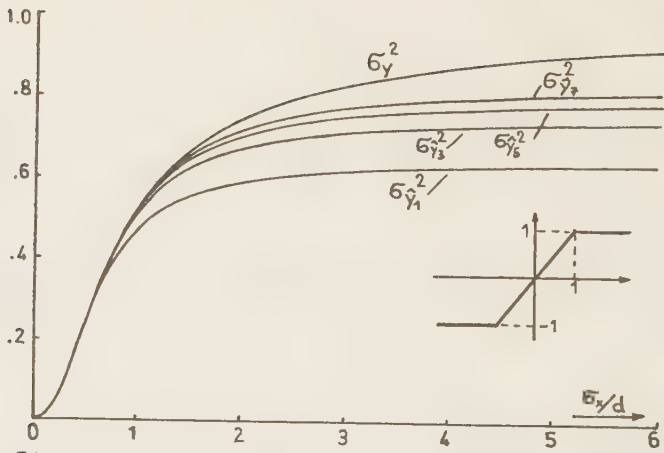


Bild 6.14

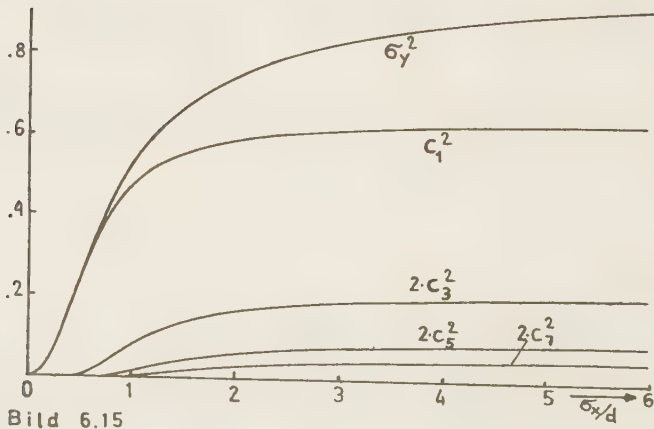


Bild 6.15

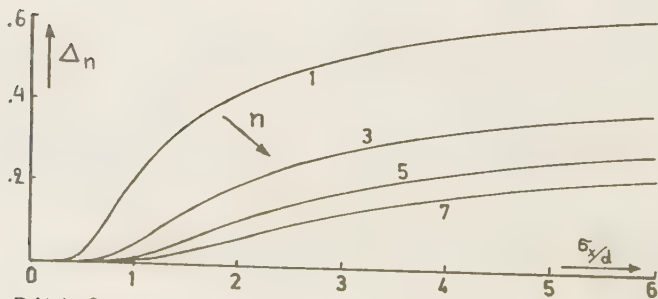


Bild 6.16

Die zugehörigen relativen Fehler Δ_n findet man für $n=1,3,5,7$ im Bild 6.16.

Zum Abschluß dieser Beispiele soll eine Ansprechempfindlichkeit betrachtet werden. Bekanntlich kann dieses auch als Tote Zone bezeichnete System

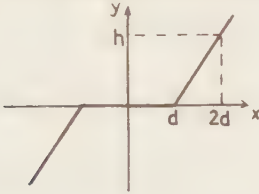


Bild 6.17 a

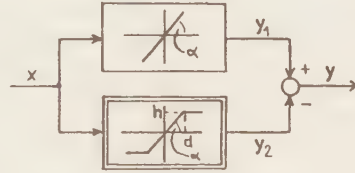


Bild 6.17 b

durch eine Differenzschaltung nach Bild 6.17b nachgebildet werden. Wegen der Zerlegungsmöglichkeit der Kennlinie erweist sich die Bestimmung der Koeffizienten als besonders einfach:

$$\begin{aligned} c_n &= \mathcal{E} \left\{ y \frac{H_n \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)}{\sqrt{n!}} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ y_1 \frac{H_n(\cdot)}{\sqrt{n!}} \right\} - \mathcal{E} \left\{ y_2 \frac{H_n(\cdot)}{\sqrt{n!}} \right\} \\ &= \frac{h}{d} \mathcal{E} \left\{ x \frac{H_n(\cdot)}{\sqrt{n!}} \right\} - c_{n\text{Begr.}} \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck wird umgeformt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ x \frac{H_n \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)}{\sqrt{n!}} \right\} &= \sigma_x \mathcal{E} \left\{ \frac{x-m_x}{\sigma_x} \frac{H_n \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)}{\sqrt{n!}} \right\} + m_x \mathcal{E} \left\{ \frac{H_n \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)}{\sqrt{n!}} \right\} \\ &= \sigma_x \mathcal{E} \left\{ \frac{H_1(\cdot)}{\sqrt{1!}} \frac{H_n(\cdot)}{\sqrt{n!}} \right\} + m_x \mathcal{E} \left\{ H_0(\cdot) \frac{H_n(\cdot)}{\sqrt{n!}} \right\} . \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaft der HERMITE-Polynome ergibt sich also nur für $n=0$ oder $n=1$ ein Beitrag. Daher gilt für die Koeffizienten

$$c_n = \begin{cases} \frac{h \cdot m_x}{d} - c_{0\text{Begr.}} & \text{für } n=0 \\ \frac{h \cdot \sigma_x}{d} - c_{1\text{Begr.}} & \text{für } n=1 \\ -c_{n\text{Begr.}} & \text{für } n \geq 2 \end{cases} \quad (6.31)$$

Die für die Approximation der Toten Zone benötigten Entwicklungskoeffizienten sind somit, abgesehen von c_0 und c_1 , bei denen der Anteil von

y_1 noch berücksichtigt werden muß, gleich den negativen Koeffizienten des Begrenzers. Dieses Ergebnis kann natürlich auch unmittelbar dem Bild 6.17b entnommen werden. Die Verbesserung der Approximation kann daher für $n > 1$ der entsprechenden Darstellung (Bild 6.15) des Begrenzers entnommen werden, wenn als Maß der Verbesserung c_n^2 betrachtet wird. Bild 6.19 zeigt die Verläufe der relativen Fehler Δ_1 bis Δ_5 für $m_x=0$, die aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned} \xi\{y^2\} = h^2 \sigma_x^2 \left\{ -\frac{d+m_x}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_x}{\sigma_x}\right)^2} - \frac{d-m_x}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d-m_x}{\sigma_x}\right)^2} + \frac{d^2+m_x^2}{\sigma_x^2} + 1 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{d+m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \operatorname{erf} \left(\frac{d+m_x}{\sqrt{2} \sigma_x} \right) - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{d-m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \operatorname{erf} \left(\frac{d-m_x}{\sqrt{2} \sigma_x} \right) \right\} \end{aligned}$$

und des Ausdrucks für m_y aus Tabelle 6.3 gewonnen wurden (Bild 6.18). In Bild 6.20 schließlich werden Δ_1 und Δ_3 für verschiedene Verhältnisse m_x/d einander gegenübergestellt.

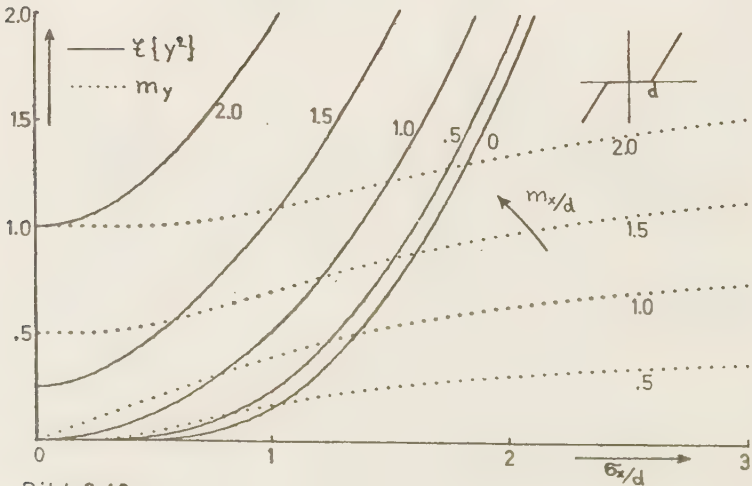


Bild 6.18

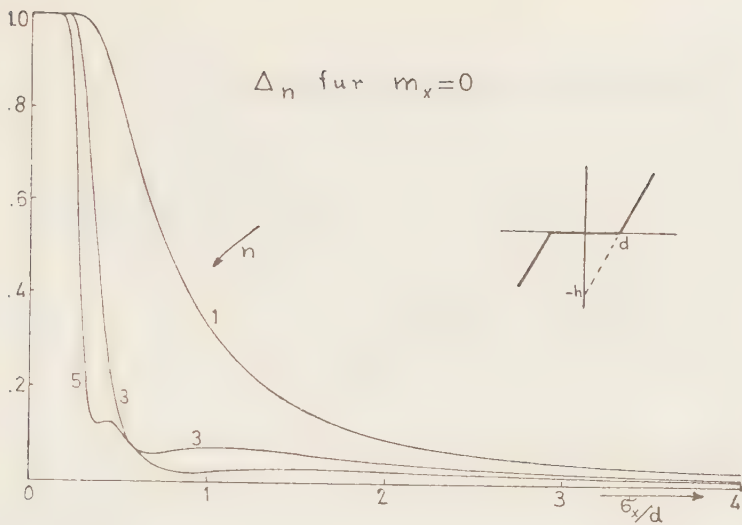


Bild 6.19

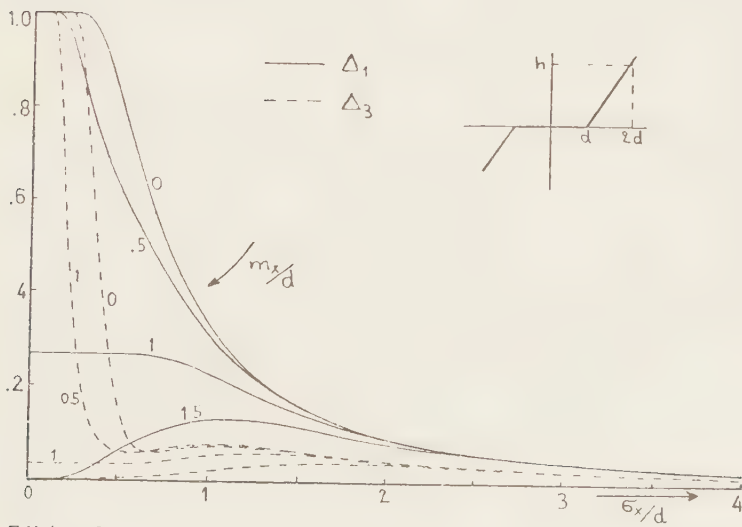


Bild 6.20

7 ERSATZSYSTEME BEI GRAM-CHARLIER-NÄHERUNG DER EINGANGSVERTEILUNGS- DICHTE

Weiß man von der Eingangsdichte nur, daß sie GAUSSähnlich ist, kennt aber nicht deren analytische Gestalt, so kann durch Messung der Quasimomente eine GRAM-CHARLIERSche Summe angegeben werden (Glg 2.32). Es sei daher angenommen, daß $p_x(u)$ durch eine Darstellung

$$\tilde{p}_n(u) = \varphi_x(u) \left[1 + \sum_{k=3}^n \frac{b_k}{\sqrt{k!}} \cdot H_k\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) \right] \quad (7.1)$$

mit

$$\varphi_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

hinreichend gut beschrieben werde. Im folgenden sollen die Auswirkungen von (7.1) auf die Kennlinienapproximation (5.4) bestimmt werden.

Es ist klar, daß man im allgemeinen nur eine Näherung $\tilde{g}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{\psi}_k(x)$ erhalten wird, sofern nicht $p_x(u)$ durch (7.1) exakt dargestellt wird. Vorwegnehmend sei schon darauf hingewiesen, daß selbst bei einer verhältnismäßig schlechten Näherung $\tilde{p}_n(u)$ sich $\tilde{g}_n(u)$ als brauchbare Ersatzkennlinie erweisen kann.

7.1 DIE KENNLINIENAPPROXIMATION ERSTER ORDNUNG

Zunächst wird von einer Darstellung des Ersatzsystems durch

$$g_1(u) = a_0 + a_1 \cdot \varphi_1(u)$$

ausgegangen. Für $a_0 = \mathcal{E}\{f(x)\}$ folgt mit (7.1) sofort die Näherung:

$$\tilde{a}_0 = c_0 + \sum_{k=3}^n \frac{b_k}{\sqrt{k!}} c_k, \quad (7.2)$$

wo die Koeffizienten c_k nach (5.17) die für eine GAUSSsche Eingangsdichte bestimmten Entwicklungskoeffizienten sind. Wegen $a_0 = m_y$ ist aus (7.2) die Abweichung des linearen Mittelwertes am Ausgang der Nichtlinearität von dem entsprechenden für eine GAUSS-Verteilung bestimmten Mittelwert zu entnehmen. Bemerkenswert ist, daß diese Abweichung außer von den Quasimomenten der Dichte $p_x(u)$ auch von den GAUSSschen Entwicklungskoeffizienten höherer Ordnung geprägt wird.

Eine ähnliche Aussage ergibt sich auch für den Koeffizienten a_1 . Man erhält hier zunächst

$$a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u-m_x}{\sigma_x} \varphi_x(u) du + \sum_{k=3}^n \frac{b_k}{\sqrt{k!}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u-m_x}{\sigma_x} H_k\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) \varphi_x(u) du.$$

Wegen $\frac{u-m_x}{\sigma_x} = H_1\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right)$ ergibt das erste Integral den Koeffizienten c_1 .

Das zweite Integral wird mit der für HERMITE-Polynome geltenden Rekursionsformel (2.30) umgeformt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u-m_x}{\sigma_x} H_k\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) \varphi_x(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[H_{k+1}\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) + k \cdot H_{k-1}\left(\frac{u-m_x}{\sigma_x}\right) \right] \varphi_x(u) du \\ &= \sqrt{(k+1)!} c_{k+1} + k \sqrt{(k-1)!} c_{k-1}, \end{aligned}$$

wo wieder c_k durch (5.17) bestimmt wird. Für $\tilde{a}_1$ folgt daher

$$\tilde{a}_1 = c_1 + \sum_{k=3}^n \left[\sqrt{k+1} \cdot c_{k+1} + \sqrt{k} \cdot c_{k-1} \right] \cdot b_k \quad (7.3a)$$

bzw. mit $b_1 = b_2 = 0$

$$\tilde{a}_1 = c_1 + \sum_{i=2}^n \left[\sqrt{i} \cdot b_{i-1} - \sqrt{i+1} \cdot b_{i+1} \right] c_i + \sqrt{n} \cdot b_{n-1} c_n + \sqrt{n+1} \cdot b_n c_{n+1} \quad (7.3b)$$

Auch hier unterscheidet sich also der für die Dichte $p_x(u)$ bestimmte Koeffizient nur durch einen additiven Term von dem für eine GAUSSsche Dichte bestimmten Koeffizienten. Diese Aussage gilt wegen $a_1 = \tilde{G}_x K$ natürlich auch für die äquivalente Verstärkung. Wird nur das vierte Quasimoment berücksichtigt, so folgt bei einer mittelwertfreien geraden Verteilungsdichte mit dem Exzeß δ_x^* :

$$\tilde{K}_{p_4} = \tilde{K}_{\text{GAUSS}} + \frac{\delta_x^*}{\tilde{G}_x} \left[\frac{c_3}{\sqrt{3!}} + 5 \frac{c_5}{\sqrt{5!}} \right] \quad (7.4)$$

Da die Koeffizienten $c_3, c_5, \dots$ den durch (5.12) definierten Verzerrungsanteil für ein GAUSSsches Eingangsgeräusch beschreiben, ist aus (7.4) die Auswirkung dieses GAUSSschen Verzerrungsanteils auf eine nicht-GAUSSsche äquivalente Verstärkung zu ersehen.

In dem in Abschnitt 2.4 beschriebenen Beispiel wurde gezeigt, daß die alleinige Berücksichtigung von δ_x^* zu einer sehr schlechten Nachbildung der Dichte $p_x(u)$ führen kann (siehe Bild 2.6b). Trotzdem kann der durch (7.4) gegebene Näherungsausdruck für die äquivalente Verstärkung sogar mit dem exakten Wert K übereinstimmen. Dazu betrachte man eine kubische Nichtlinearität: $f(u) = u^3$. Für deren äquivalente Verstärkung folgt

$$K = \frac{\mathcal{E}\{x^4\}}{\tilde{G}_x^2} \equiv \frac{m_{x4}}{\tilde{G}_x^2}.$$

Zur Bestimmung von $\tilde{K}_{p_4}$ sind die Koeffizienten $c_1 = \tilde{K}_{\text{GAUSS}} \cdot \tilde{G}_x^{-1}$ und c_3 zu bestimmen. Zur Vereinfachung sei $m_x = 0$ angenommen. Dann folgt aus der

Tabelle 6.2

$$c_1=3 \sigma_x^3, c_3= \sqrt{3!} \sigma_x^3, c_5=0,$$

so daß sich für (7.4) der Ausdruck

$$\tilde{K}_{p_4} = 3 \sigma_x^2 + \gamma_x \sigma_x^2 = \sigma_x^2 (3 + \gamma_x) \quad (7.5)$$

ergibt. Mit (2.33): $\gamma_x = \frac{\mu_{x4}}{\sigma_x^4} - 3$ folgt sofort

$$\tilde{K}_{p_4} \equiv K.$$

Diese Aussage kann leicht derart verallgemeinert werden, daß eine GRAM-CHARLIER-Näherung n-ten Grades alle Momente der Verteilungsdichte $p_x(u)$ bis einschließlich n-ter Ordnung exakt bestimmt und daher auch für Polynomkennlinien höchstens (n-1)-ten Grades die exakte äquivalente Verstärkung ergibt.

Es soll noch $\tilde{K}_{p_4}$ für eine Polynomkennlinie der Form

$$f(u)=d_1 u + d_3 u^3 + d_5 u^5 + d_7 u^7$$

angegeben werden, wobei die als gerade angenommene Dichte $p_x(u)$ durch σ_x und γ_x , d.h. durch $\tilde{p}_4(u)$ beschrieben werden soll. Gemäß (7.4) werden die Koeffizienten c_1, c_3 und c_5 benötigt, die in (6.15) bereits angegeben sind. Mit $\gamma_x = \sqrt{4!} b_4$ erhält man daher

$$\tilde{K}_{p_4} = d_1 + (\gamma_x + 3) \sigma_x^2 d_3 + 15 (\gamma_x + 1) \sigma_x^4 d_5 + 105 (2 \gamma_x + 1) \sigma_x^6 d_7 \quad (7.6)$$

In Abschnitt 2.4 wurde die Verteilungsdichte sowie die GRAM-CHARLIER-schen Näherungen eines Prozesses betrachtet, der durch Addition eines GAUSSschen und eines binären Rauschens entstand. Wird für diesen Prozeß mit der Dichte (2.34) die äquivalente Verstärkung eines symmetrischen Begrenzers (Bild 6.13) bestimmt, so erhält man unter Verzicht auf die etwas langwierige Rechnung:

$$K_{p_x} = \frac{h\alpha}{\sqrt{2\pi} d(1+\alpha^2)} \left[e^{-\frac{1}{2}(\frac{\tilde{d}+1}{\alpha})^2} - e^{-\frac{1}{2}(\frac{\tilde{d}-1}{\alpha})^2} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{d}+1}{\sqrt{2}\alpha} \right) \left[\frac{h}{d} + \frac{\tilde{h}}{1+\alpha^2} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{d}-1}{\sqrt{2}\alpha} \right) \left[\frac{h}{d} - \frac{\tilde{h}}{1+\alpha^2} \right] \quad (7.7)$$

mit $\alpha = \sigma_{r/A}$, $\tilde{h} = h_A$, $\tilde{d} = d_A$.

Die für K_{GAUSS} und $\tilde{K}_{p_4}$ benötigten Werte c_1, c_3, c_5 können der Tabelle 6.3 entnommen werden. Mit $\sigma_x^2 = A^2 \cdot (1 + \alpha^2)$ und $\gamma_x = -\frac{2}{(1+\alpha^2)^{3/2}}$ (siehe Abschnitt 2.4) folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\text{GAUSS}} &= \frac{h}{d} \operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{d}}{\sqrt{2} \sqrt{1-\alpha^2}}\right) \\ \tilde{K}_{p_4} &= \tilde{K}_{\text{GAUSS}} + \frac{\tilde{h} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{\tilde{d}^2}{1-\alpha^2}}}{6 \cdot (1+\alpha^2)^{5/2}} \left[\frac{\tilde{d}^2}{1+\alpha^2} + 1 \right].\end{aligned}\quad (7.8)$$

Die Bilder 7.1 und 7.2 zeigen für $\tilde{d} = 0.5$ bzw. $\tilde{d} = 1.0$ die Graphen dieser verschiedenen äquivalenten Verstärkungen.

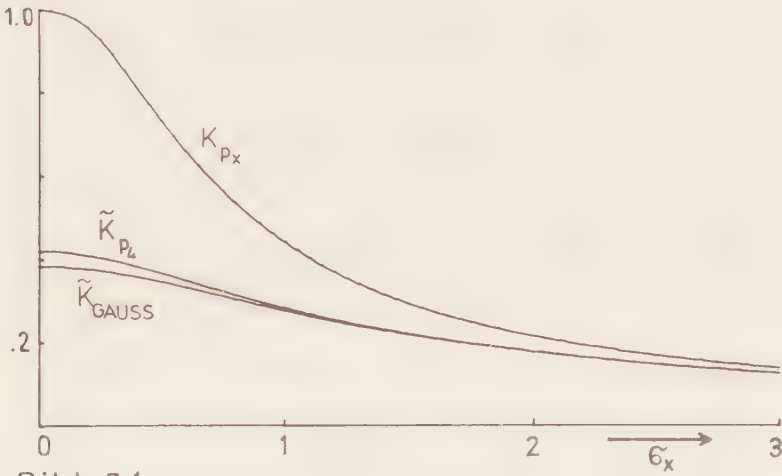


Bild 7.1

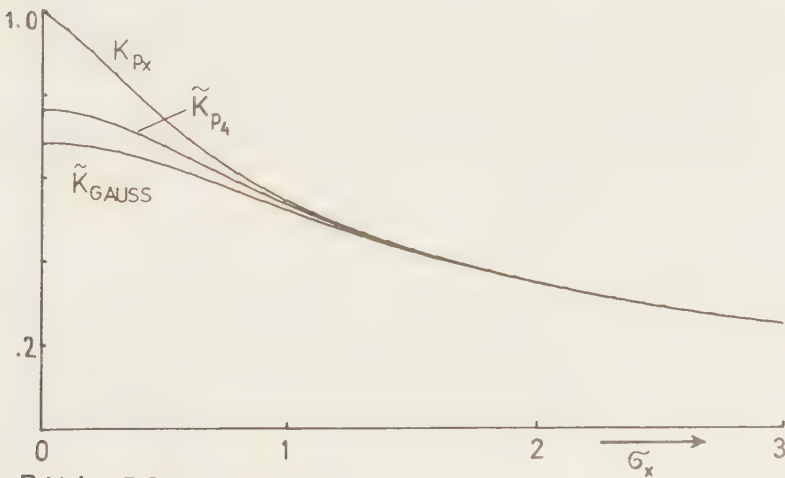


Bild 7.2

7.2 BERÜCKSICHTIGUNG DES DRITTEN ORTHONORMALPOLYNOMS

Für die folgenden Überlegungen werde zur Vereinfachung vorausgesetzt, daß die Nichtlinearität durch eine ungerade Kennlinie beschrieben werde, die Verteilungsdichte $p_x(u)$ sei gerade. Eine verglichen mit der äquivalenten Verstärkung verbesserte Beschreibung der Nichtlinearität erfolgt dann durch

$$g_3(u) = a_1 \varphi_1(u) + a_3 \varphi_3(u) .$$

Nach Glg (3.21a) ergibt sich für $\varphi_3(u)$ bei beliebiger Dichte $p_x(u)$ mit $m_x=0$ der Ausdruck

$$\varphi_3(u) = \frac{\tilde{m}_6}{\sqrt{m_6 \tilde{m}_x^2 - m_4^2}} \left[u^3 - \frac{m_4}{\tilde{m}_x^2} u \right] \quad (7.9)$$

Das dritte Orthogonalpolynom ist also bereits bei Kenntnis der Momente m_2 , m_4 und m_6 bestimmt. In (7.9) gilt gemäß der Herleitung $m_6 \tilde{m}_x^2 > m_4^2$.

Es wird nun angenommen, daß die Verteilungsdichte $p_x(u)$ durch $\tilde{m}_x$ und $\tilde{\gamma}_x$ hinreichend genau beschrieben wird. Es gelte daher

$$p_x(u) \approx \tilde{p}_4(u) = \varphi_x(u) \left[1 + \frac{\tilde{\gamma}_x}{4!} H_4\left(\frac{u}{\tilde{m}_x}\right) \right] \quad (7.10)$$

Die Auswirkung von (7.10) auf $\varphi_3(u)$ erhält man durch die Annahme

$$m_6 \approx \tilde{m}_6 := \int_{-\infty}^{\infty} u^6 \tilde{p}_4(u) du .$$

Zunächst folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^6 \tilde{p}_4(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} u^6 \varphi_x(u) du + \frac{\tilde{\gamma}_x \tilde{m}_x^6}{4!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u}{\tilde{m}_x}\right)^6 H_4\left(\frac{u}{\tilde{m}_x}\right) \varphi_x(u) du .$$

Für das erste Integral ergibt sich nach Tabelle 6.1 der Wert $15 \tilde{m}_x^6$.

Für das zweite Integral benutzt man den Zusammenhang (Tabelle 6.2):

$$v^6 = 15 H_0(v) + 45 H_2(v) + 15 H_4(v) + H_6(v)$$

und wendet die Orthogonalitätseigenschaft der HERMITE-Polynome an. Man erhält so

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^6 \tilde{p}_4(u) du = 15 \tilde{m}_x^6 (1 + \tilde{\gamma}_x) .$$

Wegen $m_4 = \mu_4 = \tilde{m}_x^4 (\tilde{\gamma}_x + 3)$ ergibt sich damit für (7.9) nach einer kurzen Umformung folgende Darstellung:

$$\tilde{\varphi}_3(u) = \frac{1}{\sqrt{6 + 9 \tilde{\gamma}_x - \tilde{\gamma}_x^2}} \left[\left(\frac{u}{\tilde{m}_x}\right)^3 - (\tilde{\gamma}_x + 3) \frac{u}{\tilde{m}_x} \right] \quad (7.11)$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß $\tilde{\varphi}_3(u)$ überhaupt anstelle des exakten Polynoms $\varphi_3(u)$ benutzt werden kann, ergibt sich aus der Forderung nach einem positiven Radikanden. Das ist der Fall, wenn $\tilde{\gamma}_x$ die Bedingung:

$$-0.6234 < \tilde{\gamma}_x < 9.6234 \quad (7.12)$$

erfüllt. Anderenfalls ist der bei der Berechnung von m_6 mittels der Näherung $\tilde{p}_4(u)$ gemachte Fehler zu groß und es müssen Quasimomente höherer Ordnung berücksichtigt werden.

Für $a_3 = \mathbb{E}\{f(x) \varphi_3(x)\}$ folgt mit (7.10):

$$\tilde{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6+9\delta_x - \delta_x^2}} \left[\mathbb{E}\left\{f(x) \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^3\right\} - (\delta_x + 3) \tilde{a}_1 \right] .$$

Mit (7.10) ergibt sich für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left\{f(x) \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^3\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{u}{\sigma_x}\right)^3 \varphi_x(u) du + \frac{\delta_x}{4!} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{u}{\sigma_x}\right)^3 \cdot H_4\left(\frac{u}{\sigma_x}\right) \varphi_x(u) du$$

Benutzt man nun die beiden Hilfsaussagen:

$$v^3 = 3H_1(v) + H_3(v)$$

$$v^3 H_4(v) = 24H_1(v) + 48H_3(v) + 15H_5(v) + H_7(v) ,$$

wobei sich die zweite Aussage durch dreimalige Anwendung der Rekursionsformel (2.30) ergibt, so kann der Erwartungswert auf die GAUSS-Koeffizienten c_1 bis c_7 zurückgeführt werden:

$$\mathbb{E}\left\{f(x) \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^3\right\} = 3c_1 + 6 \frac{c_3}{\sqrt{3!}} + \delta_x \left[c_1 + 12 \frac{c_3}{\sqrt{3!}} + 75 \frac{c_5}{\sqrt{5!}} + 210 \frac{c_7}{\sqrt{7!}} \right]$$

Für $\tilde{a}_1$ gilt nach (7.4)

$$\tilde{a}_1 = c_1 + \delta_x \left[\frac{c_3}{\sqrt{3!}} + 5 \frac{c_5}{\sqrt{5!}} \right] \quad (7.13)$$

und damit folgt letztlich

$$\tilde{a}_3 = \sqrt{6+9\delta_x - \delta_x^2} \frac{c_3}{\sqrt{3!}} + \frac{5\delta_x(12-\delta_x)}{\sqrt{6+9\delta_x - \delta_x^2}} \frac{c_5}{\sqrt{5!}} + \frac{210\delta_x}{\sqrt{6+9\delta_x - \delta_x^2}} \frac{c_7}{\sqrt{7!}} . \quad (7.14)$$

$\tilde{a}_3$ ist also unabhängig von c_1 .

Die durch $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_3$ festgelegte Näherung soll für einen Begrenzer, dessen Eingangsprozeß der in 2.4 eingeführte nicht-GAUSSsche Prozeß $x(t) = r(t) + z(t)$ ist, überprüft werden. Zunächst folgt wegen $\delta_x = -2 \left[\frac{A^2}{A^2 + 6\sigma_r^2} \right]^2$ aus (7.12), daß $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_3$ nur dann brauchbare Näherungsbeschreibungen für a_1 und a_3 liefern können, wenn für die Varianzen σ_r^2 und $\sigma_z^2 = A^2$ gilt:

$$\sigma_r^2 > 0.791 \cdot A^2 \quad (7.15)$$

oder

$$A^2 < 1.264 \cdot \sigma_r^2 .$$

Auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, darf und kann nicht auf die Güte der Approximation geschlossen werden, denn diese ist wesentlich von der Art der Nichtlinearität abhängig. Der quadratische Mittelwert des Begrenzerausganges soll mit dem der durch $\tilde{a}_1$ bzw. $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_3$ festgelegten

Ersatzsysteme verglichen werden. Deutet man die Dichte $p_x(u)$ nach Gleichung (2.34) als arithmetischen Mittelwert zweier GAUSS-Dichten mit den linearen Mittelwerten $m_x = +A$ und $m_x = -A$, so folgt mit (6.30) sofort ohne weitere Rechnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{y^2\} = h^2 \left\{ \frac{\tilde{\sigma}_r^2 + A^2 - d^2}{2 d^2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d-A}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_r} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d+A}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_r} \right) \right] + 1 - \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\sigma}_r}{\sqrt{2\pi} d} \left[\left(1 + \frac{A}{d}\right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d-A}{\tilde{\sigma}_r}\right)^2} + \left(1 - \frac{A}{d}\right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d+A}{\tilde{\sigma}_r}\right)^2} \right] \right\} \quad (7.16) \end{aligned}$$

Die für $\tilde{a}_1^2$ bzw. $\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_3^2$ benötigten GAUSSschen Begrenzerkoeffizienten c_1 bis c_7 können dem Abschnitt 6 entnommen werden; dabei ist dann $\tilde{\sigma}_x^2 = \tilde{\sigma}_r^2 + A^2$ zu setzen. Für $\tilde{\sigma}_x = 0$ ergeben sich als Spezialfall die quadratischen Mittelwerte c_1^2 und $c_1^2 + c_3^2$. Diese werden als GRAM-CHARLIER-Näherungen der Ordnung Null mit in den Vergleich einbezogen, da häufig eine nicht GAUSSsche Dichte grob durch eine GAUSSsche mit gleicher Streuung ersetzt werden kann. Bild 7.3 zeigt das Ergebnis dieses Vergleiches für den Fall $A = \tilde{\sigma}_r$ in Abhängigkeit von der Eingangsstreuung $\tilde{\sigma}_x^2$.

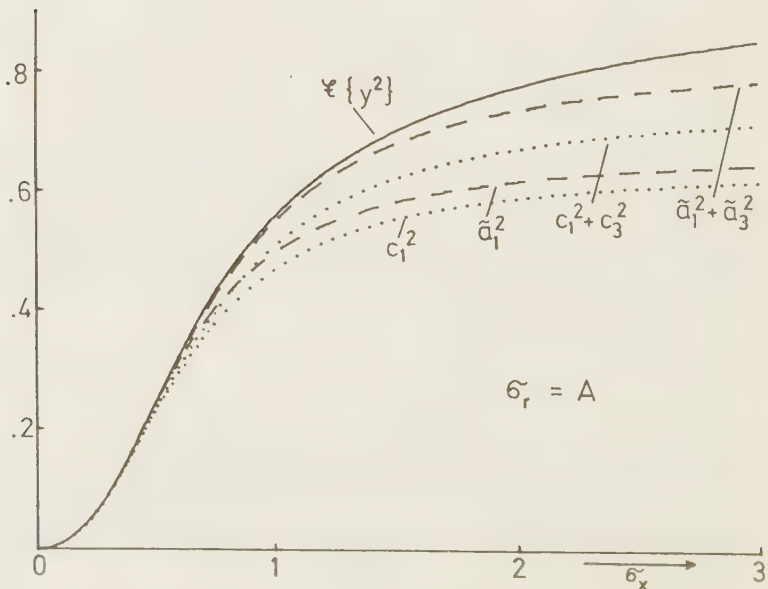


Bild 7.3

Für die gewählten Parameter erweist sich das auf der Grundlage der vierten GRAM-CHARLIER-Näherung gewonnene Ersatzsystem dritter Ordnung als genügend genau. Für $\sigma_x^2=2$ sind nachstehend die relativen Fehler der Näherungen angegeben. Besonders auffallend ist die starke Verbesserung, die durch Berücksichtigung von $\tilde{a}_3$ bewirkt wird.

$\sigma_x^2 = 2$				
$\mathcal{E}\{y^2\}$	A = 0		A = σ_r^2	
	0.7405		0.7723	
	Näherungswert	rel.Fehler	Näherungswert	rel.Fehler
c_1^2	.5865	20.79%	.5865	24.05%
$\tilde{a}_1^2$	-	-	.6150	20.37%
$c_1^2 + c_3^2$	.6692	9.64%	.6692	13.36%
$\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_3^2$	-	-	.7341	4.94%

Es sei abschließend bemerkt, daß selbstverständlich eine bessere Näherung für $\mathcal{E}\{y^2\}$, und zwar ebenfalls mit einem Ersatzsystem dritter Ordnung, erreicht werden kann, wenn Quasimomente höherer Ordnung berücksichtigt werden. Die beste Näherung erhält man bei Benutzung von a_1 und a_3 , d.h. von $p_x(u)$.

Es wird sich zeigen, daß mit dem in diesem Abschnitt beschriebenen "genäherten" nichtlinearen Ersatzsystem eine Möglichkeit gegeben ist, in geschlossenen Regelkreisen mit einer statischen Nichtlinearität eine gegenüber der üblichen linearisierten Behandlung verbesserte Beschreibung zu erzielen.

8 AUSSAGEN ÜBER KORRELATIONSFUNKTIONEN UND LEISTUNGSSPEKTREN

Die bisherigen Überlegungen über das optimale nichtlineare Ersatzsystem erforderten nur die Kenntnis der Dichte $p_x(u)$ des Eingangsprozesses. In diesem Abschnitt sollen die Betrachtungen auf zweidimensionale Kenngrößen erweitert werden. Die Bestimmung von Korrelationsfunktionen wie $\phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau)$ oder $\phi_{x \hat{y}_n}(\tau)$ ist prinzipiell dann möglich, wenn die Verbunddichte $p_x(t) \times (t+\tau)$ bekannt ist. Für diese wird eine Entwicklung der Form (3.8) angenommen. Eine Spezialisierung der damit gewonnenen Ergebnisse erfolgt dann durch Übergang zu einer "Diagonalentwicklung" und liefert daher auch die Ergebnisse für einen GAUSSschen Eingangsprozeß. Ferner können alle für Diagonalentwicklungen hergeleiteten Aussagen nach Abschnitt 3.1 auch für sin-förmige Eingangssignale interpretiert werden, worauf im einzelnen jedoch nicht eingegangen werden soll.

8.1 VERGLEICH DER KORRELATIONSFUNKTIONEN VON NICHTLINEARITÄT UND ERSATZSYSTEM

Die Autokorrelationsfunktion am Ausgang des durch $\hat{y}_n = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$ gegebenen nichtlinearen Ersatzsystems bestimmt sich aus

$$\phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau) := \mathcal{E}\{\hat{y}_n(t) \cdot \hat{y}_n(t+\tau)\} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_i a_k \mathcal{E}\{\varphi_i[x(t)] \varphi_k[x(t+\tau)]\}$$

Der Erwartungswert ist nach Voraussetzung gleich $a_{i,k}(\tau)$ (Glg. 3.4a); daher folgt

$$\phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_i a_k \cdot a_{i,k}(\tau) \quad (8.1)$$

Diese Darstellung vereinfacht sich erheblich bei vorhandenen Symmetrien.

Zunächst sei $p_x(t) \times (t+\tau)$ (u, v) gerade in beiden Variablen:

$p(u, v) = p(-u, -v)$. Dann kann gezeigt werden, daß $a_{i,k}(\tau) = 0$ für ungerade Summen $i+k$ ist. Um dies in (8.1) formelmäßig zum Ausdruck zu bringen, erfolgt eine Änderung der Summationsrichtung. Man erhält dann mit (3.6):

$$\phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau) = 1 + \sum_{\mu=2}^n \sum_{\nu=1}^{\mu} a_{2\mu-\nu} a_{\nu} \cdot a_{2\mu-\nu, \nu}(\tau), \quad a_{\nu} = 0 \text{ für } \nu > n. \quad (8.2)$$

Ist zudem die Kennlinie $f(u)$ ungerade, so ist $a_{\nu} = 0$ für gerade ν . Also folgt z.B. für $n=3$

$$\phi_{\hat{y}_3 \hat{y}_3}(\tau) = a_1^2 a_{1,1}(\tau) + a_1 a_3 [a_{3,1}(\tau) + a_{1,3}(\tau)] + a_3^2 a_{3,3}(\tau)$$

Die für die Autokorrelierte maßgebenden Koeffizientenfunktionen können wieder schematisch aufgeführt werden:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \varrho_{xx}(\tau) & 0 & a_{1,3}(\tau) & 0 & a_{1,5}(\tau) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{3,1}(\tau) & 0 & a_{3,3}(\tau) & 0 & a_{3,5}(\tau) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{5,1}(\tau) & 0 & a_{5,3}(\tau) & 0 & a_{5,5}(\tau)
 \end{array} \quad (8.3)$$

Mit der in Abschnitt 3.3 angegebenen Darstellung für die Orthonormalpolynome können die Funktionen $a_{i,k}(\tau)$ auf die Momentfunktionen

$\phi_{\nu,\mu}(\tau) := \mathbb{E}\{x^\nu(t) x^\mu(t+\tau)\}$ zurückgeführt werden. Bei einer geraden Dichte folgt beispielsweise:

$$\begin{aligned}
 a_{1,3}(\tau) &= \frac{\|\varphi_3\|}{6_x} \left[\phi_{4,3}(\tau) - \frac{\mu_4}{6_x^2} \phi_{1,1}(\tau) \right] \\
 a_{3,3}(\tau) &= \|\varphi_3\|^2 \left[\phi_{3,3}(\tau) - \frac{\mu_4}{6_x^2} (\phi_{1,3}(\tau) + \phi_{3,1}(\tau)) - \frac{\mu_4}{6_x^4} \phi_{1,1}(\tau) \right]
 \end{aligned}$$

mit $\|\varphi_3\|$ gemäß Gleichung (3.21a).

Besitzt $p_x(t) x(t+\tau)(u,v)$ eine Diagonalentwicklung, so reduziert sich die Darstellung der Autokorrelationsfunktion auf

$$\phi_{\bar{y}_n \bar{y}_n}(\tau) = \sum_{k=0}^n a_k^2 a_{k,k}(\tau) \quad (8.4a)$$

Insbesondere folgt für eine GAUSSsche Dichte nach Abschnitt 3.1

$$\phi_{\bar{y}_n \bar{y}_n}(\tau) = \sum_{k=0}^n c_k^2 \varrho_{xx}^k(\tau) \quad (8.4b)$$

wo $c_k := a_k|_{\text{GAUSS}}$ ist. Für ein sin-förmiges Eingangssignal ergibt sich schließlich mit (3.14b)

$$\phi_{\bar{y}_n \bar{y}_n}(\tau) = \sum_{k=0}^n a_k^2 \cos k\omega\tau$$

Für die Autokorrelierte am Ausgang der Nichtlinearität ergibt sich mit der als gleichmäßig konvergent angenommenen Entwicklung (3.8):

$$\begin{aligned}
 \phi_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(v) p_x(t) x(t+\tau)(u,v) du dv \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi_i(u) p_x(u) du \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \varphi_k(v) p_x(v) dv \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_i a_k a_{i,k}(\tau) \quad (8.5a)
 \end{aligned}$$

und hieraus mit $a_{i,k} = a_{k,k} \cdot \delta_{i,k}$ gemäß der Verbunddichte (3.12)

$$\phi_{yy}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 a_{k,k}(\tau) \quad (8.5b)$$

Näherungen für $\phi_{yy}(\tau)$, die sich durch Berücksichtigung von nur endlich vielen Reihengliedern ergeben, werden in der Literatur für GAUSS-Verteilungen und spezielle Nichtlinearitäten behandelt [23], [25], [28]. Für die vorliegende Arbeit ist von Bedeutung, daß diese durch Reihenabbruch von (8.5a) oder (8.5b) gewonnenen Näherung mit der Autokorrelationsfunktion am Ausgang des nichtlinearen Ersatzsystems übereinstimmt, wie ein Vergleich mit (8.1) bzw. (8.4) sofort ergibt. Es soll aber nochmals darauf hingewiesen werden, daß für die Herleitung von (8.5b) kein Gebrauch von einer Reihendarstellung für y gemacht wurde sondern nur von der Reihenentwicklung der Verbunddichte.

Aus der Darstellung der Autokorrelationsfunktion $\phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau)$ des Ersatzsystems kann auch ohne Rechnung auf die Korrelationsfunktion $\phi_{yy}(\tau)$ der Nichtlinearität geschlossen werden. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge der Zufallsvariablen $\hat{y}_n(t)$, t beliebig fest, für $n \rightarrow \infty$ im quadratischen Mittel gegen die Zufallsvariable $y(t)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \{ [\hat{y}_n(t) - y(t)]^2 \} = 0$. Werden nun zwei derartige Folgen $\hat{y}_n(t)$ und $\hat{y}_n(t+\tau)$, $n=1,2,\dots$ betrachtet, so kann mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung gezeigt werden [5], daß die Folge der reellen Zahlen: $\mathbb{E} \{ \hat{y}_n(t) \hat{y}_n(t+\tau) \}$ gegen $\mathbb{E} \{ y(t) y(t+\tau) \}$ konvergiert. Somit folgt aus der quadratischen Mittelkonvergenz der Zufallsvariablen die Punktkonvergenz der Korrelationsfunktionen:

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \hat{y}_n(t) &= y(t), \quad t \text{ beliebig} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_i a_k a_{ik}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) \end{aligned} \quad (8.6)$$

In gleicher Weise soll nun die Eingangs-Ausgangs-Kreuzkorrelationsfunktion der Nichtlinearität mit der des nichtlinearen Ersatzsystems verglichen werden.

Zunächst folgt mit $\hat{y}_n = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$:

$$\begin{aligned} \phi_{x \hat{y}_n}(\tau) &:= \mathbb{E} \{ x(t) \hat{y}_n(t+\tau) \} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \mathbb{E} \{ x(t) \cdot \varphi_k[x(t+\tau)] \} \end{aligned}$$

Mit $x = m_x + \tilde{G}_x \varphi_1(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} \phi_{x\tilde{y}_n}(\tau) &= m_x \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\mathbb{E}\{\varphi_k[x(t+\tau)]\}}_{=\delta_{0,k}} + \tilde{G}_x \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\mathbb{E}\{\varphi_1[x(t)]\varphi_k[x(t+\tau)]\}}_{=a_{1,k}(\tau)} \\ &= m_x a_0 + \tilde{G}_x \sum_{k=0}^n a_k a_{1,k}(\tau) \end{aligned}$$

Wegen $a_0 = m_y$ und $a_{1,0} = 0$ folgt daher als Ergebnis

$$\phi_{x\tilde{y}_n}(\tau) = m_x m_y + \sum_{k=1}^n \tilde{G}_x a_k a_{1,k}(\tau) \quad (8.7)$$

Bemerkenswert ist, daß für die Kreuzkorrelationsfunktion somit nur ein sehr geringer Teil der in der Verbunddichte $p_{x(t),x(t+\tau)}$ enthaltenen Information benötigt wird, denn aus dem Koeffizientenschema (8.3) ist nur die Kenntnis der ersten von Null verschiedenen Zeile erforderlich.

Wurde bei $\phi_{x\tilde{y}_n}(\tau)$ die Reihenentwicklung der Dichte nur implizit benutzt, so wird bei der Bestimmung von $\phi_{xy}(\tau)$ die Darstellung (3.8) wieder direkt angewendet. Analog zur Herleitung von (8.5a) ergibt sich hier

$$\phi_{xy}(\tau) = m_x m_y + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{G}_x a_k a_{1,k}(\tau) \quad (8.8)$$

Ebenso wie bei der Autokorrelationsfunktion gilt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{x\tilde{y}_n}(\tau) = \phi_{xy}(\tau).$$

Eine Besonderheit ergibt sich, wenn eine Reihenentwicklung der Verbunddichte in Diagonalform vorliegt. Wegen $a_{1,k}(\tau) = 0$ für $k > 1$ folgt zunächst für (8.7)

$$\phi_{x\tilde{y}_n}(\tau) = m_x m_y + \tilde{G}_x a_1 a_{1,1}(\tau). \quad (8.9a)$$

Ebenso erhält man für (8.8)

$$\phi_{xy}(\tau) = m_x m_y + \tilde{G}_x a_1 a_{1,1}(\tau). \quad (8.9b)$$

Die Kreuzkorrelierte zwischen Ein- und Ausgang des nichtlinearen Ersatzsystems ist in diesem Fall also unabhängig von der Ordnung des Ersatzsystems und stimmt mit der entsprechenden Kreuzkorrelierten der Nichtlinearität überein. Wegen $m_{\tilde{y}} = m_y$ und $a_{1,1}(\tau) = \rho_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) \tilde{G}_x^{-2}$ gilt daher für Kovarianzfunktionen

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= C_{x\tilde{y}_n}(\tau) \\ &= \frac{\mathbb{E}\{(x-m_x)(y-m_y)\}}{\tilde{G}_x^2} \cdot C_{xx}(\tau) \quad \text{für alle } \tau. \end{aligned} \quad (8.9c)$$

Weiter folgt, daß bei vorausgesetzter Diagonalentwicklung von $p_{x(t),x(t+\tau)}$ der optimale Fehlerprozeß $\epsilon_n(t) = y(t) - \hat{y}_n(t)$ orthogonal zu dem Eingangsprozeß ist, denn es gilt

$$\mathbb{E} \{ \epsilon_n(t) \cdot x(t+\tau) \} = 0. \quad (8.10)$$

Diese Verallgemeinerung der Orthogonalitätsaussage (5.9) erfolgt jedoch zu Lasten einer Einschränkung auf spezielle Eingangsprozesse.

8.2 ORTHOGONALITÄTSAUSSAGEN UND SEPARABLE PROZESSE

Orthogonalitätsaussagen der Form (8.9) findet man bei BROWN [29] und NUTTAL [30], jedoch jeweils nur für die quasilineare Approximation von y mittels der äquivalenten Verstärkung. Während BROWN ebenfalls von einer Reihenentwicklung der zweidimensionalen Dichte ausgeht, gelten die NUTTALschen Untersuchungen für eine allgemeinere Klasse von stochastischen Prozessen, für die sog. separablen Prozesse.

Ein stochastischer Prozeß $x(t)$ heißt separabel, wenn er die folgende Bedingung erfüllt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v - m_x) \cdot p_{x(t)x(t+\tau)}(u, v) dv = g_{xx}(\tau) (u - m_x) p_x(u) \quad (8.11)$$

Die Separabilitätsbedingung kann durch eine leichte Umformung als eine Forderung an den bedingten linearen Mittelwert $\mathbb{E} \{ x(t+\tau) \mid x(t)=u \}$ des Prozesses $x(t)$ gedeutet werden, denn (8.11) ist äquivalent mit der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{p_{x(t)x(t+\tau)}(u, v)}{p_x(u)} dv = m_x + g_{xx}(\tau) \cdot (u - m_x) \quad (8.12)$$

Aufgrund der Übereinstimmung von (8.12) mit der für Diagonalentwicklungen hergeleiteten Beziehung (4.28) erweist sich die Existenz einer Diagonalreihenentwicklung der Dichte $p_{x(t)x(t+\tau)}(u, v)$ als hinreichend für die Separabilität von $x(t)$.

Für den hier betrachteten Problemkreis liegt die Bedeutung der separablen Prozesse in der folgenden Aussage [30]:

Der minimale Fehler $\epsilon_1(t) := y(t) - K \cdot x(t)$ ist genau dann orthogonal zu dem Prozeß $x(t)$:

$$\mathbb{E} \{ \epsilon_1(t) \cdot x(t+\tau) \} = 0,$$

wenn $x(t)$ separabel ist.

Durch diese Aussage ist für den Fall $n=1$ der für Zufallsvariable ausgesprochene Charakterisierungssatz 4.3 auf stochastische Prozesse erweitert. Eine derartige Verallgemeinerung ist beim Übergang zu nichtlinearen Approximationen $\mathcal{P}_n$, $n > 1$ nicht mehr möglich. Jedoch können zwei andere Erweiterungen der Orthogonalitätsaussage (8.10) vorgenommen werden.

Satz 8.1 Es sei $x(t)$ ein separabler Prozeß und $\varepsilon_n(t)$ der minimale Fehler. Dann gilt

$$\mathbb{E} \{ \varepsilon_n(t) \cdot x(t+\tau) \} = 0 \quad \text{für alle } \tau. \quad (8.13)$$

Zum Beweis wird $\phi_{\varepsilon_n x}(\tau)$ umgeformt. Wegen $\mathbb{E} \{ \varepsilon_n \} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \varepsilon_n(t) x(t+\tau) \} &= \mathbb{E} \{ \varepsilon_n(t) \cdot [x(t+\tau) - m_x] \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(u) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(u) \right] (v - m_x) p_{x(t)x(t+\tau)}(u, v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(u) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(u) \right] \left(\int_{-\infty}^{\infty} (v - m_x) p_{x(t)x(t+\tau)}(u, v) dv \right) du \end{aligned}$$

Das innere Integral ist gerade die linke Seite der Separationsbedingung (8.11). Mit der Abkürzung

$$G(u, \tau) := \int_{-\infty}^{\infty} (v - m_x) p_{x(t)x(t+\tau)}(u, v) dv$$

und $\frac{v - m_x}{\sigma_x} = \varphi_1(v)$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \varepsilon_n(t) x(t+\tau) \} &= \int f(u) G(u, \tau) du - \int \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(u) \tilde{G}_x \left[\int \varphi_1(v) p_{x(t)x(t+\tau)}(u, v) dv \right] du \\ &= \int f(u) G(u, \tau) du - \sum_{i=0}^n a_i \tilde{G}_x a_{i,1}(\tau) \end{aligned}$$

Einsetzen von $a_i = \int f(u) \varphi_i(u) p_x(u) du$ und anschließende Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration führt auf

$$\mathbb{E} \{ \varepsilon_n(t) x(t+\tau) \} = \int f(u) \left[G(u, \tau) - \sum_{i=0}^n \tilde{G}_x a_{i,1}(\tau) \varphi_i(u) p_x(u) \right] du \quad (8.14)$$

An dieser Stelle wird eine Hilfsaussage benötigt.

Ein Prozeß ist genau dann separabel, wenn für beliebige nichtlineare, eindeutige Kennlinien die Beziehung (8.9b) gilt [30]. Aus dem Vergleich mit (8.7) folgt dann die benötigte Feststellung:

"Für einen separablen Prozeß gilt $a_{i,1}(\tau) = a_{1,i}(\tau) = 0$ für $i \neq 1$ ".

Folglich reduziert sich die Summe in (8.14) auf den ersten Summanden und man erhält

$$\mathbb{E} \{ \varepsilon_n(t) x(t+\tau) \} = \int f(u) \left[G(u, \tau) - \tilde{G}_x a_{1,1}(\tau) \varphi_1(u) p_x(u) \right] du.$$

Mit $a_{1,1}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau)$ und $\varphi_1(u) = \frac{u - m_x}{\sigma_x}$ ergibt der Differenzterm im Integranden wegen (8.11) den Wert Null, so daß der Satz bewiesen ist.

Es ist offensichtlich, daß die Umkehrung von Satz 8.1 nicht gilt.

Aus (8.14) folgt noch, daß $\phi_{x\varepsilon_n}(\tau) = 0$ bereits dann erfüllt ist, wenn

$$G(u, \tau) = p_x(u) \sum_{i=1}^n \phi_x a_{i,1}(\tau) \varphi_i(u)$$

oder mit (8.12):

$$\mathcal{E}\{x(t+\tau) | x(t)=u\} = m_x + \sum_{i=1}^n \phi_x a_{i,1}(\tau) \varphi_i(u).$$

Bei einer verschärften Forderung an den Eingangsprozeß kann die Aussage von Satz 8.1 in der folgenden Weise verallgemeinert werden:

Satz 8.2: Die zweidimensionale Dichte von $x(t)$ besitze eine Diagonalentwicklung. $z(t)$ sei ein beliebiger Zufallsprozeß der Form $z(t) = \sum_{i=0}^n d_i \cdot \varphi_i[x(t)]$. Dann sind die Prozesse $\varepsilon_n(t)$ und $z(t)$ zueinander orthogonal:

$$\mathcal{E}\{\varepsilon_n(t) z(t+\tau)\} = 0 \quad \text{für alle } \tau. \quad (8.15)$$

Der Beweis erfolgt durch Nachweis der Beziehung $\phi_{y_n z}(\tau) = \phi_{yz}(\tau)$.

Zunächst gilt $\mathcal{E}\{y(t) z(t+\tau)\} = \sum_{i=0}^n d_i \mathcal{E}\{y(t) \varphi_i[x(t+\tau)]\}$

Wird der Erwartungswert gemäß Glg (3.16a) ersetzt, so folgt

$$\phi_{yz}(\tau) = \sum_{i=0}^n d_i a_i a_{i,1}(\tau).$$

Für $\phi_{y_n z}(\tau)$ folgt mit den Summendarstellungen für z und $\hat{y}_n$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\hat{y}_n(t) \cdot z(t+\tau)\} &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n a_k d_i \mathcal{E}\{\varphi_k[x(t)] \varphi_i[x(t+\tau)]\} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n a_k \cdot d_i \cdot a_{i,1}(\tau) \cdot \delta_{i,k} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot d_i \cdot a_{i,1}(\tau) \equiv \phi_{yz}(\tau), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Wird insbesondere $z \equiv y_n$ betrachtet, so folgt aus (8.15)

$$\phi_{\varepsilon_n \hat{y}_n}(\tau) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau) = \phi_{y \hat{y}_n}(\tau).$$

Für die Autokorrelationsfunktion des minimalen Fehlers ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \phi_{\varepsilon_n \varepsilon_n}(\tau) &= \phi_{yy}(\tau) - \phi_{y \hat{y}_n}(\tau) - \phi_{\hat{y}_n y}(\tau) + \phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau) \\ &= \phi_{yy}(\tau) - \phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau). \end{aligned} \quad (8.16a)$$

Dieser Zusammenhang war wegen der Beziehungen (8.1) und (8.6) zu erwarten. Mit der WK-Transformation (2.19) ergibt sich als gleichwertige Aussage im Spektralbereich

$$S_{\varepsilon_n \varepsilon_n}(\omega) = S_{yy}(\omega) - S_{\tilde{y}_n \tilde{y}_n}(\omega) . \quad (8.16b)$$

Durch (8.16a) und (8.16b) ist eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der Approximationsgüte vorhanden. Es sei jedoch nochmals darauf hingewiesen, daß diese einfachen Aussagen nur für Eingangsprozesse mit einer Diagonalentwicklung hergeleitet worden sind, da nur in diesem Fall sichergestellt ist, daß das minimale Fehlersignal und das Ausgangssignal des Ersatzsystems für beliebige τ unkorreliert sind, was ja das Verschwinden der Mischglieder in (8.15) zur Folge hat.

8.3 EINE INVARIANZEIGENSCHAFT DES OPTIMALEN ERSATZSYSTEMS

In der Arbeit [31] wird gezeigt, daß die Bestimmung eines quasilinearen Ersatzsystems auch dann auf die BOOTONSche äquivalente Verstärkung führt, wenn der mittlere quadratische Fehler der zeitlichen Ableitungen der Ausgangssignale von Nichtlinearität und Ersatzsystem minimiert wird. Diese Aussage gilt auch für das optimale nichtlineare Ersatzsystem. Im folgenden soll allgemeiner der Fall einer linearen Filterung betrachtet werden. Das lineare System sei zeitinvariant und kausal und werde durch die Frequenzgangfunktion $F(j\omega)$ beschrieben.

Offensichtlich ist die Aufgabe, ein Ersatzsystem $\tilde{g}_n(x)$ so zu bestimmen, daß der quadratische Mittelwert von $z - z_n$ minimal wird - Bild 8.1a -, gleichwertig damit, die Gesamtleistung des linear verformten Fehlers e_n - Bild 8.1b - zu minimisieren.

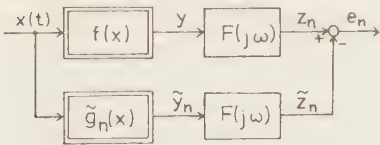


Bild 8.1a

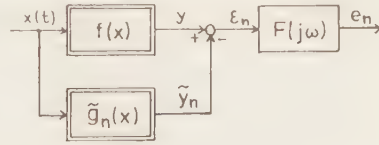


Bild 8.1b

Für den quadratischen Mittelwert $\mathbb{E}\{e_n^2(t)\}$ gilt daher

$$\mathbb{E}\{e_n^2(t)\} = \int_0^\infty S_{e_n e_n}(\omega) d\omega = \int_0^\infty |F(j\omega)|^2 \cdot S_{\varepsilon_n \varepsilon_n}(\omega) d\omega . \quad (8.17)$$

Das Auto-Leistungsspektrum des Fehlers $e_n(t)$ wird über die WK-Transformation auf Korrelationsfunktionen von y und $\tilde{y}$ zurückgeführt:

$$S_{\varepsilon_n \varepsilon_n}(\omega) = \text{WK} \{ \phi_{\varepsilon_n \varepsilon_n}(\tau) \}$$

$$= \text{WK} \{ \phi_{yy}(\tau) - \phi_{y\tilde{y}}(\tau) - \phi_{\tilde{y}y}(\tau) + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau) \}$$

Die Spektren sind hier als Distributionen aufzufassen, da sie im Fall nicht verschwindender linearer Mittelwerte einen Impulsanteil enthalten.

Wird nun angenommen, daß $x(t)$ eine Verbunddichte mit Diagonalentwicklung besitzt, so ist eine weitere Auswertung möglich. Zunächst kann

$\phi_{yy}(\tau)$ gemäß Glg (8.5b) ersetzt werden. Mit $\tilde{y} = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \varphi_k(x)$ erhält man für $\phi_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau)$ analog zu (8.4a):

$$\phi_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau) = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k^2 a_{k,k}(\tau)$$

Schließlich folgt mit Hilfe von Glg (3.16a)

$$\phi_{y\tilde{y}}(\tau) = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \mathcal{E} \{ f[x(t)] \cdot \varphi_k[x(t+\tau)] \}$$

$$= \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \cdot a_k \cdot a_{k,k}(\tau),$$

wo $a_k = \mathcal{E} \{ f(x) \varphi_k(x) \}$ ist. Wegen $\phi_{y\tilde{y}}(\tau) = \phi_{\tilde{y}y}(\tau)$, - es gilt ja $a_{k,k}(\tau) = a_{k,k}(-\tau)$ -, ergibt sich daher für $\phi_{\varepsilon_n \varepsilon_n}(\tau)$ nach einiger Umformung:

$$\phi_{\varepsilon_n \varepsilon_n}(\tau) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 a_{k,k}(\tau) + \sum_{k=0}^n (a_k - \tilde{a}_k)^2 a_{k,k}(\tau).$$

Werden die den Funktionen $a_{k,k}(\tau)$ entsprechenden spektralen Kennfunktionen mit $\tilde{s}_x^{(k)}(\omega)$ bezeichnet, so kann der zu minimisierende quadratische Mittelwert $\mathcal{E} \{ e_n^2(t) \}$ durch den folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$\mathcal{E} \{ e_n^2(t) \} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot \tilde{s}_x^{(k)}(\omega) d\omega +$$

$$+ \sum_{k=0}^n (a_k - \tilde{a}_k)^2 \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot \tilde{s}_x^{(k)}(\omega) d\omega.$$

Sämtliche auftretenden Größen sind nicht negativ. Nach Voraussetzung ist $F(j\omega)$ die Frequenzgangfunktion eines kausalen Filters. Daher kann unter Bezugnahme auf das WIENER-PALEYsche Realisierbarkeitskriterium [25] gefolgert werden, daß $|F(j\omega)|$ nicht identisch auf einem ω -Intervall verschwindet. Wird ferner noch ausgeschlossen, daß im Falle von diskreten Spektralfunktionen $\tilde{s}_x^{(k)}(\omega)$ die Spektrallinien nicht sämtlich mit Nullstellen des Amplitudenganges $|F(j\omega)|$ zusammenfallen, so sind die Integrale des letzten Ausdrucks echt positiv. Daher wird $\mathcal{E} \{ e_n^2(t) \}$ genau dann minimal, wenn die zweite Summe verschwindet, d.h. wenn gilt

$$\tilde{a}_k = a_k, \quad \text{d.i.} \quad \tilde{a}_k = \mathcal{E} \{ f(x) \cdot \varphi_k(x) \} \quad \text{für } k=0,1,\dots,n$$

Damit ist gezeigt, daß das durch Minimisierung von $\mathcal{E}\{e_n^2(t)\}$ entstandene optimale Ersatzsystem übereinstimmt mit demjenigen Ersatzsystem, das sich aus der Minimierung von $\mathcal{E}\{e_n^2(t)\}$ ergibt, wenn nur $p_x(t)x(t+\tau)$ eine Diagonalentwicklung besitzt.

Wird $|F(j\omega)|^2 = 1$ gesetzt, so ist zudem das nichtlineare Ersatzsystem erneut hergeleitet.

Die Invarianz des optimalen Ersatzsystems gegenüber einer linearen Filterung hat unmittelbare Konsequenzen für die meßtechnische Bestimmung der Ersatzkennlinie. Folgen nämlich der Nichtlinearität lineare Systemabschnitte, was in der Praxis immer der Fall sein wird, so kann eine Messung der Koeffizienten a_k nach Abschnitt 5.5 auch dann möglich sein, wenn unmittelbar hinter der Nichtlinearität ein Signalabgriff nicht durchführbar ist sondern erst nach einem dem nichtlinearen folgenden linearen System - Bild 8.2 -. Dieses lineare System braucht nur bezüglich seines Amplitudenganges bekannt zu sein; eine Information über das Phasenverhalten ist, da es sich um reine Wirkleistungsbeziehungen handelt, nicht notwendig.

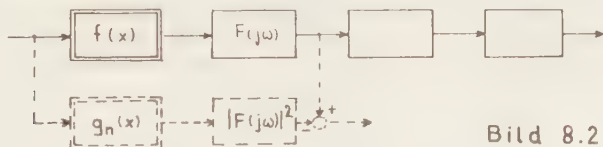


Bild 8.2

Für Ersatzsysteme erster Ordnung kann die Invarianzeigenschaft in allgemeinerer Form ausgesprochen werden. Nach NUTTAL [30] ist bei separablem Prozeß $x(t)$ das durch die äquivalente Verstärkung gekennzeichnete quasilineare Ersatzsystem das bestmögliche selbst dann, wenn beliebige dynamische Linearitäten zugelassen werden (diese Aussage ist bereits bei BOOTON für GAUSSsche Prozesse zu finden). Infolgedessen wird die Aufgabe,

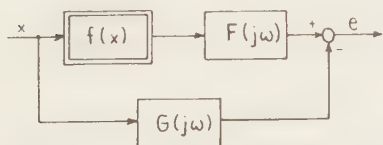


Bild 8.3

einen Frequenzgang $G(j\omega)$ zu finden, so daß $\mathcal{E}\{e^2(t)\}$ minimal wird - Bild 8.3 -, durch

$$G_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{x f(x)\}}{\mathcal{E}\{x^2\}} \cdot F(j\omega)$$

gelöst, wobei der Einfachheit halber $m_x = 0$ angenommen worden ist.

8.4 EINE FEHLERABSCHÄTZUNG BEI LINEARER FILTERUNG

Während der minimale Approximationsfehler $\mathcal{E}\{\epsilon_n^2\}$ nur von der eindimensionalen Verteilungsdichte des Eingangsprozesses $x(t)$ abhängt, wird der quadratische Mittelwert des gefilterten Fehlers, der ebenfalls minimal ist, neben dem Wirkleistungsübertragungsfaktor $|F(j\omega)|^2$ auch von der zweidimensionalen Statistik des Prozesses $x(t)$ beeinflusst.

Nach den vorangegangenen Ausführungen gilt

$$\mathcal{E}\{e_n^2(t)\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 \tilde{S}_x^{(k)}(\omega) d\omega,$$

wo zur Vereinfachung eine Diagonalgestalt angenommen und

$$\tilde{S}_x^{(k)}(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{k,k}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

gesetzt ist. Wegen $a_{k,k}(0) = 1$ gilt $\int_0^{\infty} \tilde{S}_x^{(k)}(\omega) d\omega = 1$ für alle k .

Für die weiteren Überlegungen sei $x(t)$ ein GAUSSsches Tiefpaßgeräusch:

$S_{xx}(\omega) = \frac{S_0}{1+\omega^2 T^2}$. Wegen $a_{k,k}(\tau) \equiv \varphi_{xx}^k(\tau) = e^{-\frac{|\tau|k}{T}}$ erhält man (Bild 8.4):

$$\tilde{S}_x^{(k)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{T_k}{1 + \omega^2 (T_k)^2}.$$

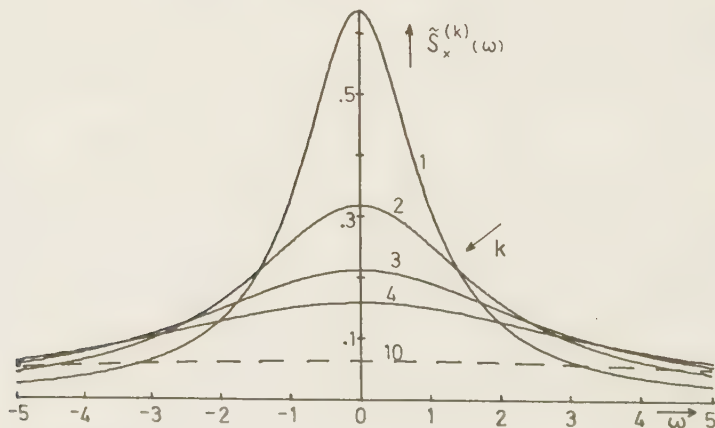


Bild 8.4

Mit der Abschätzung $\tilde{S}_x^{(k)}(\omega) \leq \tilde{S}_x^{(n+1)}(0)$ für $k \geq n+1$ folgt für $\mathcal{E}\{e^2(t)\}$:

$$\mathbb{E}\{e^2(t)\} \leq \frac{2T}{\pi(n+1)} \cdot \tilde{\sigma}_{\epsilon_n}^2 \int_0^\infty |F(j\omega)|^2 d\omega \quad .$$

Wird nun noch durch

$$\int_0^\infty S_{xx}(\omega) d\omega =: B_x \cdot \text{Max}_\omega S_{xx}(\omega) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty |F(j\omega)|^2 d\omega =: B_F \cdot \text{Max}_\omega |F|^2$$

eine äquivalente Bandbreite des Leistungsdichtespektrums bzw. des linearen Filters eingeführt [32] , so folgt mit $B_x = \frac{\pi}{2T}$:

$$\mathbb{E}\{e_n^2(t)\} \leq \frac{1}{(n+1) \cdot B_x} \tilde{\sigma}_{\epsilon_n}^2 \cdot B_F \cdot \text{Max}_\omega \{|F(j\omega)|^2\} \quad . \quad (8.18)$$

Bei einem Ersatzsystem n-ter Ordnung kann daher auch bei einem recht großen Approximationsfehler $\mathbb{E}\{\epsilon^2(t)\}$ der Fehler nach der linearen Filterung nahezu verschwinden, wenn nämlich die Bandbreite am Eingang der Nichtlinearität genügend groß und die Filterbreite geeignet klein ist. Diese Tendenz wird noch verstärkt durch die Gewichtung der Bandbreite B_x mit $n+1$. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann umgekehrt auf eine größere Genauigkeitsanforderung bezüglich $\mathbb{E}\{\epsilon^2(t)\}$ verzichtet werden, was wiederum eine niedrige Ordnung des Ersatzsystems zur Folge hat.

Die Genauigkeitssteigerung bei der Erhöhung der Ordnung des Ersatzsystems von n auf $n+1$ ergibt sich aus

$$|\mathbb{E}\{e_{n+1}^2\} - \mathbb{E}\{e_n^2\}| = \sigma_{n+1}^2 \int_0^\infty |F(j\omega)|^2 \tilde{\zeta}_x^{(n+1)}(\omega) d\omega \quad .$$

Eine (8.18) entsprechende Abschätzung führt mit den dort getroffenen Voraussetzungen auf:

$$|\mathbb{E}\{e_{n+1}^2\} - \mathbb{E}\{e_n^2\}| \leq \frac{\mathbb{E}\{\epsilon_{n+1}^2\} - \mathbb{E}\{\epsilon_n^2\}}{n+1} \cdot \frac{1}{B_x} \cdot B_F \cdot \text{Max}_\omega \{|F(j\omega)|^2\} \quad .$$

9 DIE BEHANDLUNG VON GESCHLOSSENEN REGELKREISEN MIT DER FOKKER-PLANCK-METHODE

Die weiteren Überlegungen der vorliegenden Arbeit gelten der Behandlung von stochastisch erregten Regelkreisen mit einem gedächtnislosen nichtlinearen Teilsystem. Zunächst soll in diesem Kapitel eine Methode zur "exakten" Gewinnung von statistischen Kenngrößen des nichtlinearen Kreises beschrieben werden. Das Ziel der Ausführungen ist die Herleitung von Streuungskennlinien für konkrete Beispiele, mit deren Hilfe die Güte eines später beschriebenen Näherungsverfahrens beurteilt werden kann.

9.1 ZUR BESCHREIBUNG VON STOCHASTISCH ERREGTEN DYNAMISCHEN SYSTEMEN

Die Beschreibung von deterministisch erregten dynamischen Systemen kann häufig durch eine nichtlineare Differentialgleichung der Form

$$\frac{dz(t)}{dt} = g[z(t), t] + H[z(t), t] u(t) \quad (9.1)$$

erfolgen. Dabei ist $z(t)$ der q -dimensionale Zustandsvektor, g eine vektorielle nichtlineare Funktion, H eine $q \times n$ -Matrix und $u(t)$ der n -dimensionale Vektor der Systemerregungen. Zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung $z(t_0) =: z_0$ werde eine eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (9.1) vorausgesetzt. Daher kann bei bekanntem Eingangssignal aus der Kenntnis des gegenwärtigen Systemzustandes in eindeutiger Weise auf den zukünftigen Systemzustand geschlossen werden. Eine zusätzliche Information etwa über die Vergangenheit des Systems ist nicht erforderlich.

Wirkt nun anstelle des deterministischen ein stochastisches Eingangsgeschwellig mit bekannter Verteilungsdichte, kann diese Aussage aufgrund des zufälligen Charakters der Musterfunktionen im allgemeinen nicht mehr gemacht werden. An ihre Stelle tritt eine Forderung an die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen des stochastischen Zustandsvektors:

$$W \{ z(t_{i+1}) \leq \zeta | z(t_1), \dots, z(t_i) \} = W \{ z(t_{i+1}) \leq \zeta | z(t_i) \} \quad (9.2)$$

für beliebige Zeitpunkte $t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1}$.

(9.2) besagt, daß der Systemzustand ein MARKOV-Prozeß sein soll. Aus dieser Forderung ergeben sich weitreichende Konsequenzen für die

mathematische Behandlung der Gleichung (9.1). So kann zwar die sich durch formale Integration von (9.1) ergebende Beziehung

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t g[z(\tau), \tau] d\tau + \int_{t_0}^t H[z(\tau), \tau] u(\tau) d\tau \quad (9.3)$$

als Definition des Zustandsprozesses $z(t)$ aufgefaßt werden, wobei die auftretenden Integrale als im quadratischen Mittel konvergente RIEMANN-Integrale zu interpretieren sind, jedoch ist dafür die RIEMANN-Integrierbarkeit der Autokorrelationsfunktionen der Integranden notwendig. Insbesondere muß daher die Autokorrelierte der Anregung $u(t)$ RIEMANN-integrierbar sein. Folglich kann ein weißes Geräusch zunächst nicht als Systemerregung zugelassen werden. Andererseits kann aber gezeigt werden, daß bei einer Systemerregung durch ein GAUSSsches weißes Rauschen der Systemzustand gerade die geforderte MARKOV-Eigenschaft besitzt [5].

Einen Ausweg aus diesem Engpaß bringt die Einführung eines erstmals von ITÔ vorgeschlagenen erweiterten Integralbegriffs, des sog. stochastischen Integrals. Auf Einzelheiten dieser Erweiterung auf "nicht im klassischen Sinn im quadratischen Mittel integrierbare Prozesse" soll hier verzichtet werden, zumal für i.q.M. stetige Prozesse das ITÔ-Integral und die herkömmliche Integraldefinition übereinstimmen.

Für die mathematische Behandlung wird (9.1) ersetzt durch die "stochastische Differentialgleichung"

$$dz(t) = g[z(t), t] dt + H[z(t), t] dv(t) \quad (9.4)$$

mit dem WIENER-Prozeß $v(t)$, der formal durch die Beziehung $u(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ mit dem weißen Geräusch zusammenhängt. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine formale Lösung von (9.4) nach den Methoden der gewöhnlichen Differentialgleichungen für deterministische Funktionen zu falschen Ergebnissen führen kann [5], [33]. Da im weiteren Verlauf die Differentialgleichung nur zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens der betrachteten physikalischen Systeme benutzt wird, im übrigen aber eine (9.4) zugeordnete partielle Differentialgleichung für die Verteilungsdichten im Vordergrund steht, wird im folgenden die gewohnte Schreibweise (9.1) auch bei stochastischen Prozessen benutzt.

Da der durch (9.4) definierte stochastische Prozeß $z(t)$ ein MARKOV-Prozeß ist, ist es möglich, für die q -dimensionale Verbundverteilungsdichte

der Komponenten $z_1(t), \dots, z_q(t)$ des Zustandsvektors $z(t)$ eine partielle Differentialgleichung anzugeben. Zur Vereinfachung und besseren Übersichtlichkeit sei die Dichte im folgenden mit $p(z_1, \dots, z_q) =: p(z)$ bezeichnet. Dann besitzt die der Differentialgleichung (9.4) zugeordnete FOKKER-PLANCK-Gleichung die Darstellung

$$\frac{\partial p(z)}{\partial t} = - \sum_{k=1}^q \frac{\partial [p(z) g_k(z, t)]}{\partial z_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^q \frac{\partial^2 [p(z) \cdot (H Q H^T)_{k,l}]}{\partial z_k \partial z_l}, \quad (9.5)$$

wobei die $n \times n$ -Matrix Q die Kovarianzmatrix des WIENER-Prozesses $v(t)$ ist:

$$E \{ dv(t) dv(t)^T \} = Q dt.$$

Die Herleitung der linearen parabolischen Differentialgleichung (9.5) ist in der Literatur zu finden [5], [34], [35] und soll daher hier unterbleiben.

Bei zeitinvarianten Systemen kann für den Fall, daß ein stationärer Zustand existiert, $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ gesetzt werden. Damit kann die Dichte $p(z_1, \dots, z_q)$ aus der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^q \frac{\partial [p(z) \cdot g_k(z)]}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^q \frac{\partial^2 [p(z) \cdot (H Q H^T)_{k,l}]}{\partial z_k \partial z_l} \quad (9.6)$$

und den Nebenbedingungen

$$p(z_1, \dots, z_q) \geq 0, \quad (9.7a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(z_1, \dots, z_q) dz_1 \dots dz_q = 1 \quad (9.7b)$$

grundsätzlich bestimmt werden, sofern die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (9.6) gewährleistet ist, was jedoch bei bestimmten Bedingungen an $g(z)$ und $H(z)$ der Fall ist [36], [37]. Eine allgemeine Lösung von (9.6) ist bisher nicht bekannt. Die in der Literatur angegebenen expliziten Lösungen beschränken sich sämtlich auf einfache Spezialfälle, die zudem nur sehr begrenzt auf Regelkreise angewendet werden können.

9.2 ZUR ANWENDBARKEIT DER FOKKER-PLANCK-GLEICHUNG BEI REGELKREISEN

Für einen vorgegebenen nichtlinearen Regelkreis wird zunächst eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung für die interessierende Ausgangsgröße aufgestellt, die dann in ein nichtlineares System erster Ordnung derart umzuformen ist, daß ein Vergleich mit der Systembeschreibung (9.1) vorgenommen werden kann. Bei fest vorgegebenen Regelkreisparametern und Eingangsgeräusch zeigt es sich, daß die Zustandsdifferentialgleichung des Kreises nicht grundsätzlich auf die Form (9.1), wo $u(t)$ ein weißes Rauschen sein soll, gebracht werden kann. Dies sei an einem einfachen Beispiel verdeutlicht.

Es wird ein Regelkreis bestehend aus einer gedächtnislosen Nichtlinearität mit einer schiefsymmetrischen monoton steigenden Kennlinie, einem nachgeschalteten Integrierer und einer starren Rückführung betrachtet:

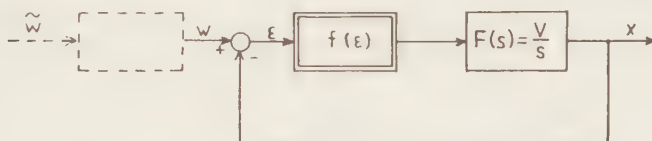


Bild 9.1

Für das Eingangssignal der Nichtlinearität erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{de}{dt} = -V f(\epsilon) + \frac{dw}{dt}, \quad (9.8)$$

die bereits als Zustandsdifferentialgleichung des Kreises gedeutet werden kann. Es werden nun drei Fälle für das Eingangssignal $w(t)$ des Kreises betrachtet:

1. $w(t)$ sei ein weißes Geräusch. Eine Umformung von (9.8), so daß eine Identifikation mit (9.1) erfolgen kann, ist offenbar nicht möglich. Somit kann die MARKOV-Eigenschaft der Zustandsgröße $\epsilon(t)$ nicht gefolgert werden, die Angabe einer FP-Gleichung für $p(\epsilon)$ ist nicht möglich.
2. $w(t)$ entstehe aus einem weißen Geräusch $\tilde{w}(t)$ mittels eines Formfilters $F_f(s) = 1/s$. Folglich kann in (9.8) $\frac{dw}{dt} = \tilde{w}$ gesetzt werden, und die Voraussetzungen für das Bestehen einer FP-Gleichung sind gegeben.

3. $w(t)$ sei ein farbiges Rauschen erster Ordnung mit dem Leistungsdichtespektrum $S_{ww}(\omega) = \frac{S_0}{1 + T^2 \omega^2}$. $w(t)$ wird daher durch eine lineare stochastische Differentialgleichung

$$T \frac{dw(t)}{dt} + w(t) = \tilde{w}(t)$$

mit einem weißen Geräusch $\tilde{w}(t)$ als Anregung beschrieben. Ausgehend von (9.8) erhält man dann das folgende Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{T} (\varepsilon + x) - V f(\varepsilon) + \frac{1}{T} \tilde{w}$$

$$\frac{dx}{dt} = V f(\varepsilon)$$

Der Vektorprozeß $(\varepsilon, x)^T$ ist hier ein MARKOV-Prozeß; für die Verbunddichte $p(\varepsilon, x)$ kann demzufolge eine FP-Gleichung aufgestellt werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Bestimmung einer FP-Gleichung nicht in allen Fällen möglich ist. Bei einer Regelkreisstruktur nach Bild 9.1 hat man immer dann Erfolg, wenn bei einem durch die Übertragungsfunktion $F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ gegebenen Linearteil das Eingangsgeräusch des Kreises durch ein Formfilter $F_f(s) = \frac{1}{N(s)}$ aus einem weißen Geräusch erzeugt wird. Die Ordnung des den Zustand des Kreises beschreibenden Differentialgleichungssystems ist gleich Grad $(N(s))$. Bei einem andersartigen Formfilter kann es u.U. ebenfalls möglich sein, den Kreis durch eine (8.1) entsprechende Beziehung zu beschreiben. Jedoch ist das mit der Einführung von zusätzlichen Zustandsvariablen und somit mit einer Erhöhung der Dimension der FP-Gleichung verbunden. Damit ist man aber sehr schnell an der Grenze angelangt, bis zu der es noch möglich ist, eine Lösung der FP-Gleichung in analytischer Form anzugeben.

9.3 DIE BESTIMMUNG DER VERTEILUNGSDICHTE BEI ZWEI REGELKREISEN

Im folgenden soll ein Regelkreis nach Bild 9.2 betrachtet werden. Das Führungsgeräusch entstehe aus einem mit dem Linearteil des Kreises übereinstimmenden Formfilter, auf das ein GAUSSsches weißes Rauschen wirke. Die Nichtlinearität des Kreises sei zunächst beliebig.

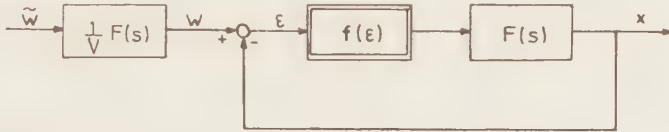


Bild 9.2

9.3.1 P-T₁-System als Linearteil des Folgekreises

Dieses Beispiel ist zwar bei SAWARAGI et al. [38] behandelt, jedoch gelangen die Autoren zu einem falschen Endergebnis. Zudem wird ein Zwischenergebnis in Abschnitt 9.5 benötigt werden, so daß eine ausführlichere Herleitung angebracht ist.

Es sei also
$$F(s) = \frac{V}{1+sT}$$

die Übertragungsfunktion des Linearteils. Gefragt ist nach der Verteilungsdichte $p(\epsilon)$. Eine den Kreis beschreibende Differentialgleichung erhält man sofort durch

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{T}\epsilon - \frac{V}{T}f(\epsilon) + \frac{1}{T}\tilde{w}.$$

Eine Interpretation als stochastische Differentialgleichung der Form (9.4) für die Zustandsgröße ϵ ist unmittelbar möglich. Mit

$$g(\epsilon) = -\frac{1}{T}[\epsilon + V \cdot f(\epsilon)]$$

und

$$HQH^T = \frac{\pi S_0}{T^2}$$

ergibt sich aus (9.6) die FP-Gleichung

$$\frac{\pi S_0}{2T} \frac{d^2}{d\epsilon^2} p(\epsilon) + \frac{d}{d\epsilon} [(\epsilon + V f(\epsilon)) \cdot p(\epsilon)] = 0. \quad (9.9)$$

Durch Integration ergibt sich hieraus

$$\frac{d}{d\epsilon} p(\epsilon) = -\frac{1}{6_w^2} [\epsilon + V f(\epsilon)] p(\epsilon) + c, \quad (9.10)$$

wo $6_w^2 = \frac{\pi S_0}{2T}$ die Varianz des Tiefpaßgeräusches erster Ordnung ist.

Fordert man, daß die Dichte und ihre Ableitung für $\epsilon \rightarrow \infty$ verschwindet, so ergibt sich die Integrationskonstante in (9.10) zu $c=0$. Die weitere Integration führt dann auf

$$p(\epsilon) = c_1 \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{6w^2} \int_{-\infty}^{\epsilon} [u + V f(u)] du \right\}, \quad (9.11)$$

wobei c_1 bei einer analytischen Kennlinienfunktion $f(\epsilon)$ allein aus der Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} p(\epsilon) d\epsilon = 1$ bestimmt werden kann. In der Anwendung interessant ist der Fall, daß $f(\epsilon)$ oder $f'(\epsilon)$ Sprungstellen aufweisen wie etwa die Kennlinie eines Schalters oder eines Begrenzers. Dann muß die FP-Gleichung für die jeweils glatten Bereiche betrachtet werden; für die Lösungen wird an den Rändern ein stetiger Übergang gefordert [35] [39]. Dieses Vorgehen soll am Beispiel eines Begrenzers mit der Kennlinie

$$f(\epsilon) = \begin{cases} k \epsilon, & k = h/d \quad \text{für } |\epsilon| \leq d \\ h \cdot \operatorname{sgn} \epsilon, & \text{für } |\epsilon| > d \end{cases}$$

verdeutlicht werden.

Wird entsprechend der Kennlinienvorschrift die Differentialgleichung (9.9) für die Bereiche $|\epsilon| \leq d$ und $|\epsilon| \geq d$ gelöst, so erhält man

$$p_1(\epsilon) = c_1 \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{6w^2} \int_{-\infty}^{\epsilon} [u + Vku] du \right\} = c_1 \exp \left\{ -\frac{1+Vk}{2 \cdot 6w^2} \epsilon^2 \right\} \quad \text{für } |\epsilon| \leq d,$$

$$p_2(\epsilon) = c_2 \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{6w^2} \int_{-\infty}^{\epsilon} [u + Vh \cdot \operatorname{sgn}(\epsilon)] du \right\} = c_2 \exp \left\{ -\frac{\epsilon^2}{2 \cdot 6w^2} - \frac{Vh|\epsilon|}{6w^2} \right\} \quad \text{für } |\epsilon| \geq d$$

Aus der Forderung $p_1(\pm d) = p_2(\pm d)$ ergibt sich

$$c_2 = c_1 e^{\frac{Vkd^2}{2 \cdot 6w^2}}.$$

c_1 wird aus der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\epsilon) d\epsilon \equiv 2 \int_0^d p_1(\epsilon) d\epsilon + 2 \int_d^{\infty} p_2(\epsilon) d\epsilon = 1$$

bestimmt. Dies führt mit $\alpha^2 := 1 + Vk$ zu

$$\frac{1}{c_1} = \sqrt{2\pi} \cdot 6w \left\{ \frac{1}{\alpha} \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha d}{\sqrt{2} \cdot 6w} \right) + e^{\frac{Vkd^2}{2 \cdot 6w^2}} \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha^2 d}{\sqrt{2} \cdot 6w} \right) \right] \right\}. \quad (9.12)$$

Die gesuchte Verteilungsdichte kann damit in der folgenden Form geschrieben werden:

$$p(\epsilon) = \begin{cases} c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{2 \cdot 6w^2} \epsilon^2} & \text{für } |\epsilon| \leq d \\ c_1 e^{\frac{Vkd^2}{2 \cdot 6w^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot 6w^2} [|\epsilon| + Vh]^2} & \text{für } |\epsilon| \geq d. \end{cases} \quad (9.13)$$

Die Dichte $p(\epsilon)$ für einen Begrenzer setzt sich also aus drei Teilstücken für $\epsilon < -d$, $|\epsilon| \leq d$ und $\epsilon > d$ zusammen, die für $\epsilon = \pm d$ stetig ineinander übergehen (Bild 9.3). Aus (9.10) folgt sofort, daß diese Übergänge sogar stetig differenzierbar sind.

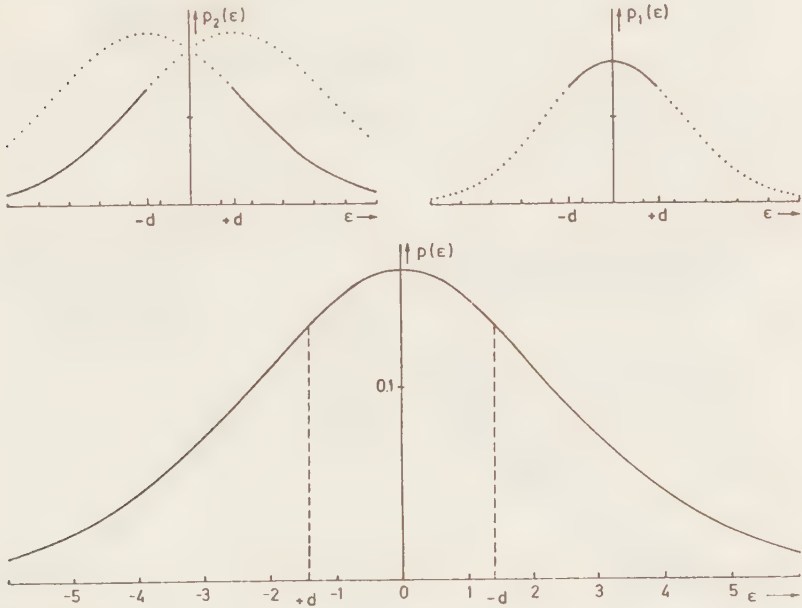


Bild 9.3

Aus der Dichte (9.13) können noch folgende Spezialfälle entnommen werden:

1. $h=d=0$. Dann müssen ϵ und w die gleiche Dichte haben. Der entsprechende Grenzübergang in (9.13) ergibt

$$p(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_w} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma_w^2}}.$$

2. $d \rightarrow \infty$, $k=\text{const.}$, d.h. die Nichtlinearität wird durch eine reine Verstärkung k ersetzt. Da der Kreis lineares Verhalten zeigt, muß

ε GAUSSverteilt sein. Aus (9.13) folgt

$$p(\varepsilon) \Big|_{\substack{d \rightarrow \infty \\ k = \text{const}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_w} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_w^2}{\sigma_w^2} \varepsilon^2}$$

3. Wird schließlich $d=0$, $h=\text{const}$. gesetzt, so ergibt sich die Verteilungsdichte für einen Kreis mit Zweipunktschalter:

$$p(\varepsilon) \Big|_{\substack{d=0 \\ h=\text{const}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_w [1 - \text{erf}(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2} \sigma_w})]} e^{-\frac{[|\varepsilon| + \sqrt{h}]^2}{2 \sigma_w^2}} \quad (9.14)$$

Eine gemeinsame Darstellung dieser Fälle zeigt Bild 9.4.

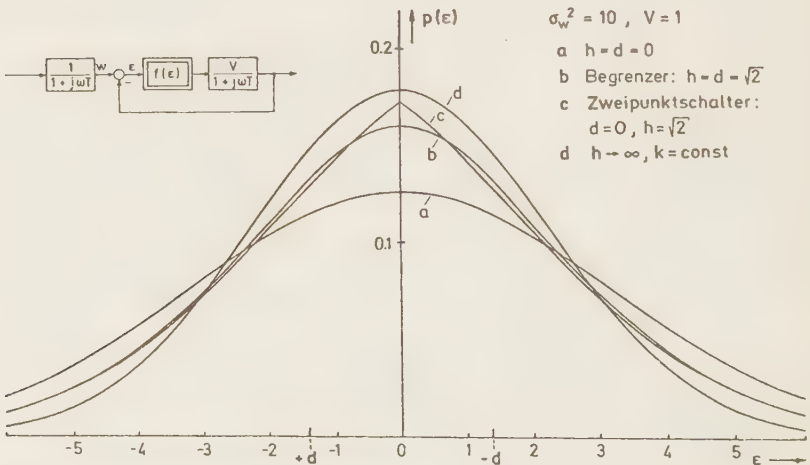


Bild 9.4

9.3.2 I-T₁-System als Linearteil

In dem in Bild 9.2 dargestellten Kreis sei nun der Linearteil des Kreises wie auch das Formfilter ein integrierendes System mit einer Verzögerung erster Ordnung: $F(s) = \frac{V}{s(1+sT)}$. Für das Eingangssignal der Nichtlinearität findet man sofort die Beziehung

$$T \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + V f(\varepsilon) = \tilde{w}$$

Durch Wahl von ε und $\dot{\varepsilon}$ als Zustandsvariable kann diese in ein System der Form (9.1) bzw. (9.4) überführt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \dot{\varepsilon} & \equiv g_1(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \\ \frac{d\dot{\varepsilon}}{dt} &= \frac{1}{T} - \frac{V}{T} f(\varepsilon) + \frac{1}{T} \tilde{w} & \equiv g_2(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) + \frac{1}{T} \tilde{w} \end{aligned}$$

Wegen $HQH^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi S_0}{2T} \end{pmatrix}$ ergibt sich aus dem Vergleich mit (9.6) die folgende FP-Gleichung für $p(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$:

$$\frac{\pi S_0}{2T} \frac{\partial^2}{\partial \dot{\varepsilon}^2} p + \left[\frac{1}{T} \dot{\varepsilon} + \frac{V}{T} f(\varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial \dot{\varepsilon}} - \dot{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{T} p = 0. \quad (9.15)$$

SAWARAGI et al. leiten für den hier betrachteten Kreis ausgehend von dem zweidimensionalen Differentialgleichungssystem die FP-Gleichung mit Hilfe der MARKOV-Eigenschaft explizit her, gelangen dabei aber aufgrund eines Fehlers in der Herleitung zu einer von (9.15) abweichenden Form. Ein anderer Weg wird von FULLER [37] vorgeschlagen, der für ein nicht-lineares System zweiter Ordnung zunächst die zugehörigen HAMILTON-Gleichungen bestimmt, wodurch sich Vereinfachungen in der anschließenden Herleitung der FP-Gleichung ergeben. Die Spezialisierung des FULLER'schen Ergebnisses führt dann auf (9.15).

Die Differentialgleichung ist invariant bezüglich einer Vertauschung $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, $\dot{\varepsilon} \rightarrow -\dot{\varepsilon}$. Ist $p(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ Lösung von (9.15), so ist es auch $p(-\varepsilon, -\dot{\varepsilon})$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung [37] gilt daher $p(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = p(-\varepsilon, -\dot{\varepsilon})$. Zur Lösung von (9.15) wird für $\varepsilon > 0$ folgender Ansatz gemacht

$$p(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = c \cdot \exp \left\{ \alpha \dot{\varepsilon}^2 + \beta \int_0^\varepsilon f(u) du \right\},$$

wo die Konstanten α und β so bestimmt werden, daß (9.15) erfüllt ist. Mit der Abkürzung $G^2 := \frac{\pi S_0}{2T}$ erhält man

$$p(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = c \sqrt{2\pi} G \cdot \exp \left\{ -\frac{2V}{\pi S_0} \int_0^\varepsilon f(u) du \cdot \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi} G} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{G} \right)^2} \quad (9.16)$$

Die Konstante c ist abhängig von der jeweiligen Nichtlinearität und wird aus $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) d\varepsilon d\dot{\varepsilon} = 1$ bestimmt. Die Beziehung (9.16) führt zu folgenden Feststellungen:

1. $\varepsilon(t)$ und $\dot{\varepsilon}(t)$ sind statistisch unabhängig. Für GAUSSverteiltes $\varepsilon(t)$, - dann ist auch $\dot{\varepsilon}(t)$ GAUSSverteilt -, ist eine derartige Aussage bekannt. In dem vorliegenden Fall ist aber $\varepsilon(t)$ außer für $f(\varepsilon) \equiv k\varepsilon$ nicht GAUSSverteilt.
2. $\dot{\varepsilon}(t)$ ist GAUSSverteilt mit der Varianz $G^2 = \frac{\pi S_0}{2T}$ und unabhängig von der Art der Nichtlinearität. Wird der zugrunde gelegte Regel-

kreis in die in Bild 9.5 gezeigte äquivalente Struktur überführt, so bedeutet das, daß die Verteilungsdichte von $p(\dot{\epsilon})$ durch die nichtlineare Rückführung nicht beeinflußt wird.

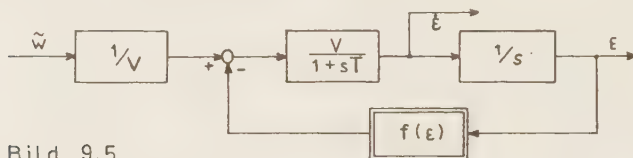


Bild 9.5

3. Die Dichte $p(\epsilon)$ ist unabhängig von der Zeitkonstanten des Filters $F(s)$. Wird speziell ein Zweipunktschalter als Nichtlinearität gewählt: $f(\epsilon) = h \cdot \text{sgn}(\epsilon)$, so gehorcht ϵ einer LAPLACE-Verteilungsdichte:

$$p(\epsilon) = \frac{Vh}{\pi S_0} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{Vh}{\pi S_0} |\epsilon| \right\} .$$

Insbesondere die zweite Aussage ist bemerkenswert. Wählt man $f(\epsilon) = k \epsilon$, so erhält man einen rein linearen Kreis, bei dem ϵ und $\dot{\epsilon}$ GAUSS-verteilt sind. Die Varianz von $\dot{\epsilon}$ kann aus $\sigma_{\dot{\epsilon}}^2 = \int_0^\infty S_{\dot{\epsilon}\dot{\epsilon}}(\omega) d\omega$ bestimmt werden. Man erhält

$$\sigma_{\dot{\epsilon}}^2 = \int_0^\infty \left| \frac{j\omega}{T(j\omega)^2 + j\omega + kV} \right|^2 \cdot S_0 d\omega .$$

Ein Vergleich mit den tabellierten Integralen [25]

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{2(n-1)}(\omega)}{h_n(\omega) \cdot h_n(-\omega)} d\omega$$

mit

$$g_{2(n-1)}(\omega) = b_0(j\omega)^{2(n-1)} + \dots + b_{n-1} ,$$

$$h_n(\omega) = a_0(j\omega)^n + \dots + a_n$$

führt wegen $I_2 = \frac{1}{2a_0a_1} \left(\frac{a_0b_1}{a_2} - b_0 \right)$ mit $b_0 = -1$, $b_1 = 0$ und $a_0 = T$, $a_1 = 1$, $a_2 = kV$ auf

$$\sigma_{\dot{\epsilon}}^2 = \frac{\pi S_0}{2T} .$$

Auch in diesem einfachen Fall findet man für $\sigma_{\dot{\epsilon}}^2$ eine Unabhängigkeit von der Rückführverstärkung k .

9.4 BESTIMMUNG EINER STREUUNGSKENNLINIE FÜR EINEN NICHTLINEAREN KREIS MIT P-T₁-GLIED

Für den in Abschnitt 9.3.1 betrachteten Kreis soll im folgenden die Varianz des Folgefehlers ϵ bestimmt werden, wobei als Nichtlinearität zunächst ein Begrenzer angenommen wird. Mit der Dichte (9.13) erhält man wegen $\mathbb{E}\{\epsilon\} = 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\epsilon}^2 &= 2 \int_0^{\infty} \epsilon^2 p(\epsilon) d\epsilon \\ &= 2 c_1 \int_0^d \epsilon^2 \exp\left(-\frac{\alpha^2 \epsilon}{2 \tilde{\sigma}_w^2}\right) d\epsilon \\ &\quad + 2 c_1 \exp\left(\frac{V k d^2 \alpha^2}{2 \tilde{\sigma}_w^2}\right) \int_d^{\infty} \epsilon^2 \cdot \exp\left(-\frac{(\epsilon + V h)^2}{2 \tilde{\sigma}_w^2}\right) d\epsilon.\end{aligned}$$

Dabei genügt es offensichtlich wegen der Symmetrie der Dichte, nur den positiven Bereich zu betrachten. Nach der Auswertung der beiden Integrale erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\epsilon}^2 &= \frac{1}{A} \left\{ \frac{\tilde{\sigma}^2}{\alpha^3} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}}\right) - \frac{2 V^2 k^2}{\sqrt{2} \pi \alpha^2} \tilde{\sigma} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2 \tilde{\sigma}^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\frac{V k \alpha^2}{2 \tilde{\sigma}^2}\right) \cdot [\tilde{\sigma}^2 + V^2 k^2] \cdot \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}}\right)\right] \right\} \quad (9.17)\end{aligned}$$

mit

$$A := \frac{1}{\alpha} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}}\right) + \exp\left(\frac{V k \alpha^2}{2 \tilde{\sigma}^2}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}}\right)\right].$$

Dabei sind die bezogenen Größen $\tilde{\sigma}_{\epsilon} := \sigma_{\epsilon}/d$ und $\tilde{\sigma} := \sigma_w/d$ eingeführt worden. Ferner ist $\alpha := \sqrt{1+V k}$ mit $k = h/d$ gesetzt.

Wie bei der Verteilungsdichte kann auch hier als Spezialfall von (9.17) die Streuung für einen Kreis mit Zweipunktschalter ermittelt werden. Durch Grenzübergang $d \rightarrow 0$ erhält man aus (9.17)

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon}^2 \Big|_{d \rightarrow 0} = \tilde{\sigma}_w^2 + V^2 h^2 - \frac{2 V h \tilde{\sigma}_w}{\sqrt{2} \pi \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{V h}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_w}\right)\right] \cdot \exp\left(\frac{V^2 h^2}{2 \tilde{\sigma}_w^2}\right)},$$

ein Ergebnis, das bereits eine wesentlich einfachere Form hat als die entsprechende Formel für den Begrenzer. Daß auch diese Beziehung noch ihre Tücken besitzt, zeigt sich bei ihrer numerischen Auswertung.

Da die dabei auftretenden Schwierigkeiten typisch für Ausdrücke mit sowohl Exponential- wie auch Fehlerfunktionen sind, sollen sie im folgenden detaillierter beschrieben werden. Zunächst empfiehlt es sich jedoch wieder, zu einer normierten Darstellung überzugehen, die in dem vorlie-

genden Fall noch den Vorteil hat, völlig parameterfrei zu sein. Dazu wird $\tilde{\sigma}_{\epsilon/Vh} =: \tilde{\sigma}_{\epsilon}$ und $\tilde{\sigma}_{w/Vh} =: \tilde{\sigma}_w$ gesetzt. Dann folgt

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon}^2 = \tilde{\sigma}_w^2 + 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{\sigma}_w \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_w^2\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\sigma}_w\right)} . \quad (9.18)$$

Zur numerischen Berechnung von einzelnen Streuungswerten ist die Kenntnis der numerischen Werte der Fehlerfunktion, also des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-v^2} dv$, notwendig. Wird für $\operatorname{erf}(z)$ der in Abschnitt 6.3 angegebene Algorithmus in Form eines Unterprogramms verwendet, so ergibt sich für $\tilde{\sigma}_{\epsilon}$ in Abhängigkeit von $\tilde{\sigma}_w$ der in Bild 9.6 dargestellte Ver-

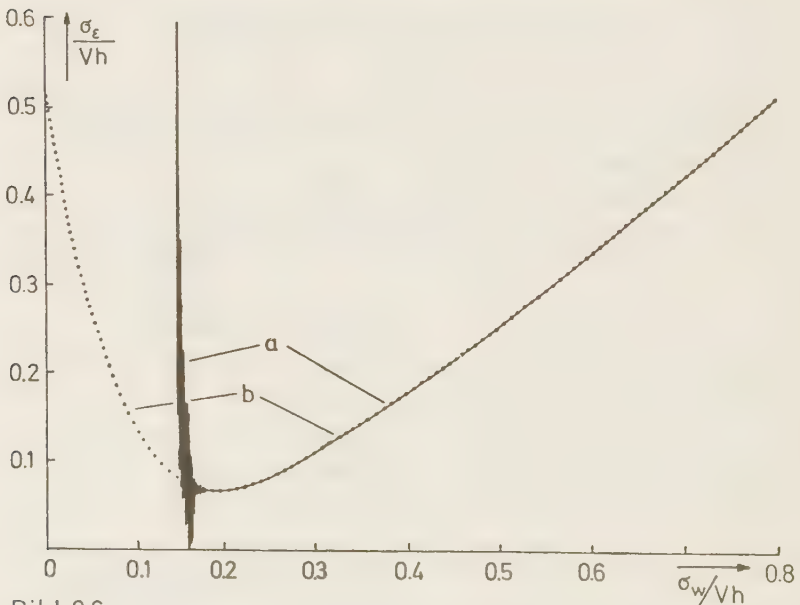


Bild 9.6

lauf a. Während die Kurve sich für große Werte von $\tilde{\sigma}_w$ monoton verhält, oszilliert sie zunächst für $\tilde{\sigma}_w < 0.2 Vh$, um dann für $\tilde{\sigma}_w \rightarrow 0$ sehr rasch gegen unendlich zu streben. Wird dagegen in der Beziehung (9.18) der Grenzübergang $\tilde{\sigma}_{\epsilon} \rightarrow 0$ durchgeführt, so geht in Übereinstimmung mit der Anschauung auch $\tilde{\sigma}_{\epsilon}$ gegen Null.

Das widersprüchige Verhalten der graphischen Darstellung wird durch den letzten Term in (9.19) erklärt, denn für hinreichend kleine Werte von $\tilde{\epsilon}_w$ treten sowohl im Zähler wie auch im Nenner Gleitkommazahlen mit sehr großen negativen Exponenten auf. Zwar kann das "Platzen" des Algorithmusses durch Kürzen von $e^{-1/2 \tilde{\epsilon}_w^2}$ vermieden werden, jedoch geht damit auch die die Konvergenz gegen Null bewirkende Eigenschaft des Exponentialfaktors verloren (Bild 9.6, Kurve b). Dieses als numerische Instabilität des Berechnungsverfahrens zu deutende Verhalten läßt sich auch durch Erhöhung der Genauigkeit nicht beseitigen. Es ist vielmehr für kleine $\tilde{\epsilon}_w$ -Werte ein anderer Algorithmus notwendig, der nicht die Fehlerfunktion sondern den gesamten letzten Term in (9.18) approximiert. Hier bietet sich die folgende asymptotische Entwicklung [40] an:

$$\sqrt{\pi} z e^{z^2} \cdot \operatorname{erfc}(z) \sim 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{(2z^2)^{\nu}} \text{ für } z \rightarrow \infty \quad (9.19)$$

mit $\operatorname{erfc}(z) := 1 - \operatorname{erf}(z)$.

Wird $z := \frac{1}{\sqrt{2} \tilde{\epsilon}_w}$ gesetzt, so ergibt sich für $\tilde{\epsilon}_w^2$ eine asymptotische Approximation der Form

$$\tilde{\epsilon}_w^2 \sim h_k(\tilde{\epsilon}_w) \quad \text{für } \tilde{\epsilon}_w \rightarrow 0 \quad (9.20)$$

mit

$$h_k(\tilde{\epsilon}_w) = \tilde{\epsilon}_w^2 + 1 - \frac{1}{1 + \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2\nu-1) \tilde{\epsilon}_w^{2\nu}} ,$$

wobei k geeignet zu wählen ist. Hinsichtlich einer einfachen Programmierung empfiehlt sich eine Umformung des Nenners, die eine rekursive Berechnung erlaubt. Für die k -te Partialsumme $N_k(\tilde{\epsilon}_w)$ erhält man durch wiederholtes Ausklammern

$$N_k(\tilde{\epsilon}_w) = 1 - \tilde{\epsilon}_w^2 (1 - 3 \tilde{\epsilon}_w^2 (1 - \dots (1 - (2k-1) \tilde{\epsilon}_w^2) \dots)) ,$$

so daß sich folgender Algorithmus ergibt:

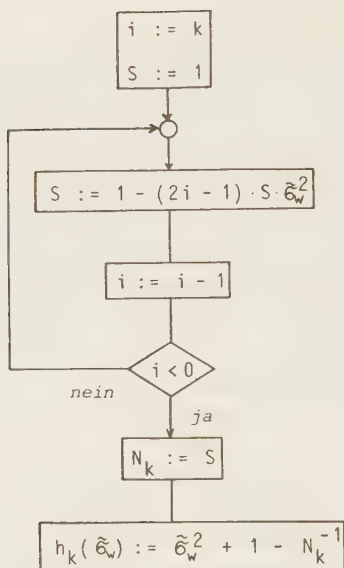


Bild 9.7 zeigt für verschiedene k den Verlauf der quadratischen Funktion $h_k(\tilde{\epsilon}_w^2)$. Der unterschiedliche Verlauf verdeutlicht die Bedeutung der Wahl der zu berücksichtigenden Gliederanzahl. Dies ist insbesondere zu beachten, wenn anstelle der Varianz die Streuung $\tilde{\epsilon}_\epsilon$ approximiert werden soll (Bild 9.8). Da $h_k(\tilde{\epsilon}_w)$ für ungerade k negativ wird, dürfen nur Näherungsausdrücke mit einer geraden Anzahl von Summengliedern herangezogen werden. Der Darstellung 9.8 ist ferner zu entnehmen, daß eine Vergrößerung der Gliederzahl für zunehmendes $\tilde{\epsilon}_w$ keine Verbesserung der Approximation bewirkt. Auch dieses Verhalten erklärt sich aus der asymptotischen Eigenschaft von (9.20). Der Gültigkeitsbereich der Näherung für kleine $\tilde{\epsilon}_w$ ergibt sich aus dem Schnittpunkt mit der punktiert gezeichneten Näherungskurve für große $\tilde{\epsilon}_w$. Der gesamte Verlauf von $\tilde{\epsilon}_\epsilon$ ist schließlich in Bild 9.9 durch die Kurve a dargestellt. Die Kurve b zeigt vergleichsweise das Ergebnis einer linearisierten Behandlung des Kreises nach BOOTON, wo die Nichtlinearität durch eine äquivalente Verstärkung ersetzt worden ist.

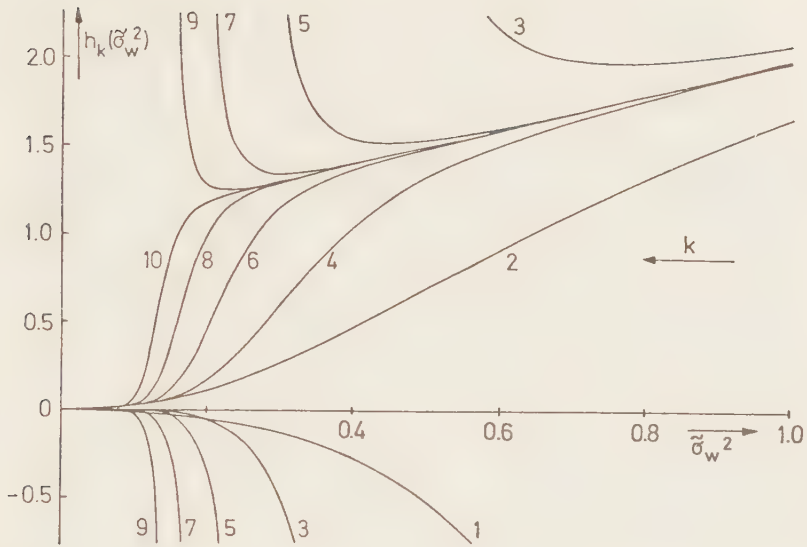


Bild 9.7

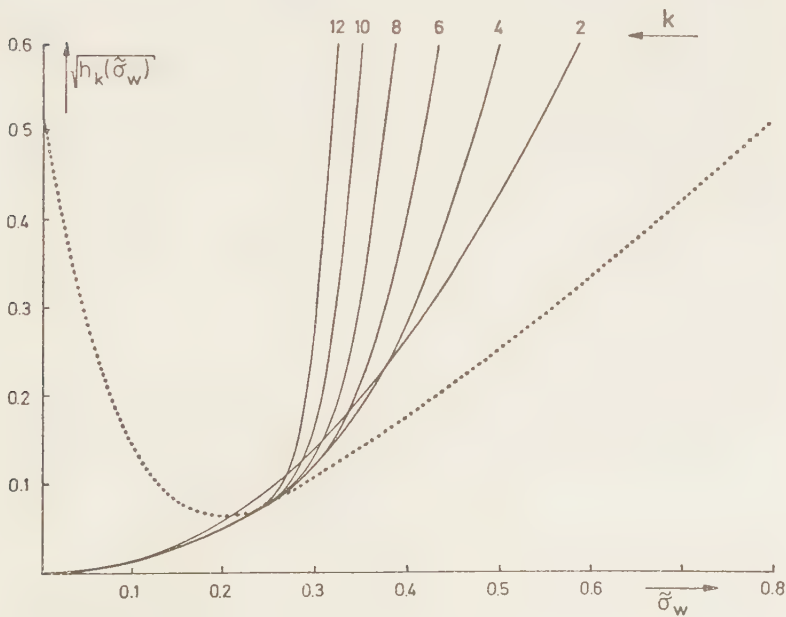


Bild 9.8

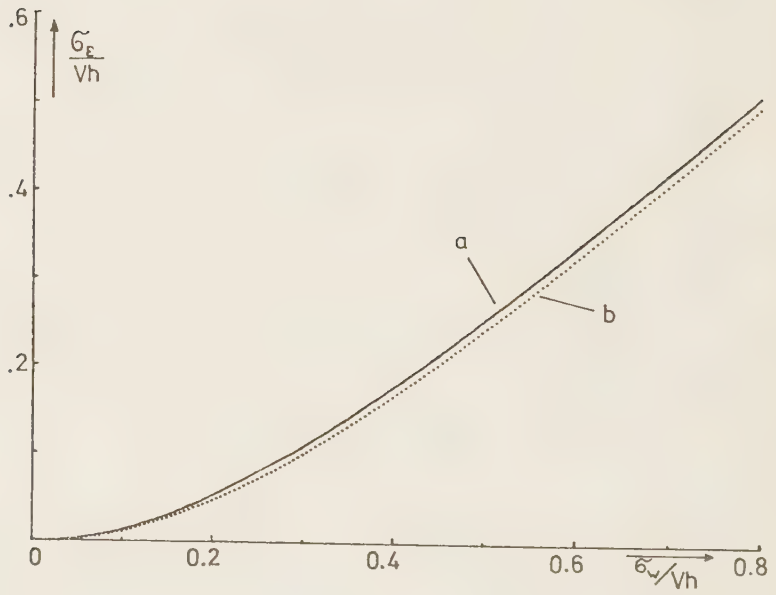


Bild 9.9

9.5 DIE VARIANZ DES FOLGEFEHLERS FÜR DEN LINEARISIERTEN KREIS MIT EXAKTER VERTEILUNGSDICHTE

Die exakte Bestimmung von statistischen Kenngrößen eines nichtlinearen Kreises, der ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit die in Bild 9.10a dargestellte Struktur besitze [25], erfolgt mittels der Integration einer FOKKER-PLANCK-Gleichung. Kann diese nicht angegeben werden, oder ist die Integration nicht durchführbar, so kann u.U. die Betrachtung eines linearisierten Kreises weiterhelfen: Anstelle des nichtlinearen Kreises wird ein Kreis betrachtet, in dem die Nichtlinearität durch die zugehörige äquivalente Verstärkung ersetzt ist.

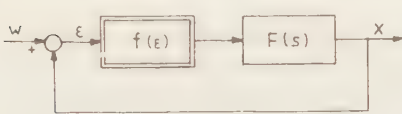


Bild 9.10a

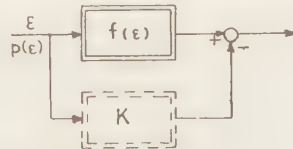


Bild 9.10b

Diese bestimmt sich dann gemäß Gleichung (5.11) aus

$$K = \frac{\mathcal{E}\{\epsilon f(\epsilon)\}}{\mathcal{E}\{\epsilon^2\}}, \quad (9.21)$$

wobei die Erwartungswerte mit der Dichte $p(\epsilon)$ des Eingangssignals der Nichtlinearität zu bilden sind.

Betrachtet man nun den linearisierten Kreis nach Bild 9.10c, so sind in diesem bei einem vorausgesetzten GAUSSschen Führungsgeräusch sämtliche

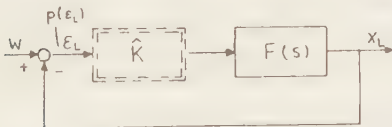


Bild 9.10c

Signale, also auch das Eingangssignal ϵ_L des Ersatzsystems, ebenfalls GAUSSverteilt, denn diese entstehen einzig durch lineare Operationen aus $w(t)$. Es ist daher zu fordern, daß der Folgefehler des nichtlinearen Kreises eine GAUSSähnliche Verteilung besitzt.

Dies ist der Fall, wenn der Exzeß χ_{ϵ} möglichst klein wird. Dann kann die äquivalente Verstärkung K durch folgenden Näherungswert $\hat{K}$ ersetzt werden:

$$\hat{K} = \frac{\mathcal{E}\{\epsilon_L f(\epsilon_L)\}}{\mathcal{E}\{\epsilon_L^2\}}. \quad (9.22)$$

Die Auswertung von (9.22) erfolgt mit der durch $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ festgelegten GAUSS-Verteilung und führt auf einen i.a. durch eine transzendente Funktion gegebenen Zusammenhang zwischen $\hat{K}$ und $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$.

Andererseits erhält man $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ als Gesamtleistung (Mittelwertfreiheit sämtlicher Signale sei vorausgesetzt) nach den Methoden der linearen Systemtheorie aus

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2 = \int_0^{\infty} \frac{S_{ww}(\omega)}{|1 + \hat{K} F(j\omega)|^2} d\omega, \quad (9.23)$$

wobei die Auswertung mit Hilfe der Integrale I_n (s. Abschn. 9.3) erfolgen kann. Aus den Beziehungen (9.22) und (9.23) können dann $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ und $\hat{K}$ jeweils als Funktion der Eingangsstreuung $\tilde{\sigma}_w$ bestimmt werden.

Die Notwendigkeit, $\hat{K}$ anstelle von K zu benutzen, ergibt sich daraus, daß die zur Auswertung von K benötigte Dichte $p(\epsilon)$ unbekannt ist. Im folgenden soll der Ausdruck (9.23) für die in Abschnitt 9.3 betrachteten Regelkreise mit der exakten äquivalenten Verstärkung ausgewertet werden.

Zunächst sei der Kreis von Abschnitt 9.3.1 gegeben. Mit $F(j\omega) = \frac{V}{1+j\omega T}$ und $S_{ww}(\omega) = \frac{S_0}{1+\omega^2 T^2}$ folgt für $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ nach (9.23):

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2 = \frac{\tilde{\sigma}_w^2}{1+KV} \quad (9.24)$$

und mit (9.21)

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2 = \frac{\tilde{\sigma}_w^2 \cdot \mathcal{E}\{\epsilon^2\}}{\mathcal{E}\{\epsilon^2\} + V \mathcal{E}\{f(\epsilon)\}} \quad (9.25)$$

Die weitere Auswertung könnte mit Hilfe der Verteilungsdichte $p(\epsilon)$ geschehen, die jedoch von der jeweiligen nichtlinearen Kennlinie abhängt. Zu einer allgemeineren Aussage gelangt man durch geeignete Umformung des Nenners:

$$\mathcal{E}\{\epsilon^2\} + V \mathcal{E}\{\epsilon f(\epsilon)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon [\epsilon + V \cdot f(\epsilon)] p(\epsilon) d\epsilon$$

Wird hier berücksichtigt, daß $p(\epsilon)$ die in 9.3.1 angegebene FP-Gleichung erfüllt, so ergibt sich mit (9.10) sofort

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\epsilon^2\} + V \mathcal{E}\{\epsilon f(\epsilon)\} &= -\tilde{\sigma}_w^2 \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \frac{d}{d\epsilon} p(\epsilon) d\epsilon \\ &= -\tilde{\sigma}_w^2 \left[\epsilon p(\epsilon) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} p(\epsilon) d\epsilon \right] \\ &= \tilde{\sigma}_w^2 \end{aligned}$$

Damit folgt für (9.25)

$$\sigma_{\epsilon_L}^2 = \sigma_{\epsilon}^2$$

Der betrachtete Regelkreis kann demzufolge durch einen äquivalenten "linearisierten" Kreis ersetzt werden, der die gleiche Varianz des Folgefehlers wie der nichtlineare Kreis liefert, wenn die äquivalente Verstärkung mit der exakten Verteilungsdichte $p(\epsilon)$ ausgewertet wird.

Diese Aussage ist unabhängig von der speziellen Nichtlinearität. Daß sie auch bei einem System zweiter Ordnung erfüllt ist, zeigt das folgende Beispiel eines Kreises mit einem I-T₁-System, wie er in Abschnitt 9.2.3 bereits behandelt wurde.

Für die Varianz des linearisierten Kreises erhält man

$$\sigma_{\epsilon_L}^2 = \frac{\pi S_0}{2 K V}$$

Wird hier wieder K durch Glg (9.21) ausgedrückt, so muß gezeigt werden, daß

$$\mathcal{E} \{ \epsilon f(\epsilon) \} = \frac{\pi S_0}{2 V}$$

gilt. Aus (9.16) erhält man für die Dichte $p(\epsilon)$:

$$p(\epsilon) = \sqrt{2\pi} \cdot c \cdot \sigma \cdot \exp \left\{ - \frac{2 V}{\pi S_0} \int_0^{\epsilon} f(u) du \operatorname{sgn}(\epsilon) \right\}$$

mit $\sigma^2 = \frac{\pi S_0}{2 V}$ und der Normierungskonstanten c . Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \epsilon f(\epsilon) \} &= \sqrt{2\pi} \cdot c \cdot \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon f(\epsilon) \exp \left\{ - \frac{2 V}{\pi S_0} \int_0^{\epsilon} f(u) du \operatorname{sgn}(\epsilon) \right\} d\epsilon \\ &= -2\sqrt{2\pi} \cdot c \cdot \sigma \frac{\pi S_0}{2 V} \int_0^{\infty} \epsilon \left[\frac{-2 V}{\pi S_0} f(\epsilon) \cdot \exp \left\{ \cdot \right\} \right] d\epsilon \\ &= -2\sqrt{2\pi} \cdot c \cdot \sigma \frac{\pi S_0}{2 V} \left[\epsilon \exp \left\{ - \frac{2 V}{\pi S_0} \int_0^{\epsilon} f(u) du \right\} \right]_0^{\infty} - \\ &\quad - \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \frac{2 V}{\pi S_0} \int_0^{\epsilon} f(u) du \right\} d\epsilon \Big] \\ &= \frac{\pi S_0}{2 V} \cdot 2 \int_0^{\infty} \sqrt{2\pi} \cdot c \cdot \sigma \exp \left\{ - \frac{2 V}{\pi S_0} \int_0^{\epsilon} f(u) du \right\} d\epsilon \\ &= \frac{\pi S_0}{2 V} \cdot , \end{aligned}$$

denn c ist ja gerade so zu wählen, daß das letzte Integral bezüglich ϵ den Wert $1/2$ erhält. Somit gilt auch für diesen Kreis

$$\sigma_{\epsilon_L}^2 = \sigma_{\epsilon}^2 .$$

Der in den beiden Beispielen gewählte Beweisgang erfordert die Kenntnis der Verteilungsdichte. Bei Kreisen mit linearen Systemen höherer Ordnung oder anderen Eingangsspektren ist diese aber wie erwähnt nicht bekannt, so daß die obige Feststellung auf die hier betrachteten Regelkreise beschränkt bleiben muß. Es kann jedoch angenommen werden, daß sie allgemeiner zumindest für solche Regelkreise gültig ist, deren Führungsformfilter aus dem Nenner des im Kreis enthaltenen Frequenzganges besteht.

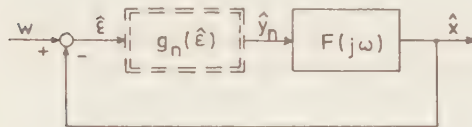
Die getroffene Feststellung beinhaltet zwar keine unmittelbare Anwendungsmöglichkeit, doch steckt sie die Grenzen der linearisierten Behandlung von nichtlinearen Regelkreisen mit der BOOTONschen äquivalenten Verstärkung ab:

Die Auswertung der äquivalenten Verstärkung mit der GAUSSverteilung bedeutet, daß nur die geringst mögliche statistische Information über den Folgefehler in Anspruch genommen wird. Der zweite Grenzfall zeichnet sich dann dadurch aus, daß ein Maximum der theoretisch möglichen Information herangezogen wird. Das ist gerade der Fall, wenn die exakte Dichte $p(\epsilon)$ benutzt wird.

10. ZUR ANWENDUNG NICHTLINEARER ERSATZSYSTEME IM GESCHLOSSENEN REGEL- KREIS

Im letzten Abschnitt wurde bereits auf die genäherte Behandlung eines nichtlinearen Regelkreises mit einem linearen Ersatzsystem eingegangen. Nach Abschnitt 5.2 ergibt sich das lineare als Spezialfall des nichtlinearen Ersatzsystems. Es liegt daher nahe zu untersuchen, ob und wie eine verbesserte genäherte Beschreibung der statistischen Eigenschaften des nichtlinearen Regelkreises möglich ist, wenn die Nichtlinearität durch ein nichtlineares Ersatzsystem mit der Kennlinie $g_n(u) =$

$a_1 \varphi_1(u) + \dots + a_n \varphi_n(u)$ ersetzt wird. Diesen Überlegungen gelten die



folgenden Kapitel. Sie sind durch einen beträchtlichen formalen Aufwand gekennzeichnet, der im wesentlichen daraus resultiert, daß durch die Einbeziehung nichtlinearer Ersatzsysteme

Bild 10.1

die vereinfachenden Methoden der linearen Systemtheorie nur noch sehr begrenzt benutzt werden können. Eine diesbezügliche Vereinfachung wird durch die Beschränkung der Untersuchungen auf Nichtlinearitäten mit einer eindeutigen, ungeraden Kennlinie sowie mittelwertfreies Eingangsgeräusch des Kreises erzielt. Weiter sei $w(t)$ wieder als GAUSS-verteilt angenommen.

In dem vorliegenden Kapitel wird zunächst die durch den geschlossenen Kreis bewirkte Problematik aufgezeigt und ein Lösungsvorschlag gemacht. Der folgende Abschnitt behandelt die Anwendung von nichtlinearen Ersatzsystemen bei einer GAUSSschen Eingangsichte des Ersatzsystems. Schließlich wird der Zusammenhang mit in der Literatur vorhandenen Ergebnissen hergestellt.

10.1 GRUNDSATZLICHE ÜBERLEGUNGEN ZUR ANWENDUNG VON ERSATZSYSTEMEN IM REGELKREIS

Das für nichtlineare Systeme ohne Rückführungen entwickelte Konzept des nichtlinearen Ersatzsystems erfordert als grundlegende Voraussetzung die Kenntnis der Verteilungsdichte am Eingang der Nichtlinearität. Diese Dichte bestimmt die Struktur des Ersatzsystems, legt also den Typ der Orthonormalpolynome fest, und ermöglicht zudem die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten und somit die Anpassung des Ersatzsystems an die jeweilige Kennlinienform der Nichtlinearität. Wird nun anstelle der isolierten Nichtlinearität ein nichtlinearer Regelkreis betrachtet, so kann davon ausgegangen werden, daß diese Dichte nicht bekannt ist. Das Ersatzsystem wird ja gerade eingeführt, um Näherungsaussagen über $p_{\varepsilon}(u)$ zu erhalten. Doch selbst dann, wenn man rein hypothetisch annimmt, daß $p_{\varepsilon}(u)$ bekannt ist, und daher ein Ersatzsystem in der Form

$$g_n(u) = \sum_{v=0}^n a_v \varphi_v(u)$$

bestimmt werden kann, sind die Schwierigkeiten nicht ausgeräumt. In dem Augenblick, wo das Ersatzsystem anstelle der Nichtlinearität in den Kreis geschaltet wird, ergeben sich in dem neuen Ersatzkreis zwangsläufig andere Verteilungsdichten wie in dem ursprünglichen Kreis. Insbesondere erhält man hinter der Mischstelle eine von $p_{\varepsilon}(u)$ abweichende Verteilungsdichte $p_{\tilde{\varepsilon}}(u)$, die nicht bekannt ist. Über den Ersatzkreis können somit nach wie vor keine weitergehenden Aussagen gemacht werden. Es sei bemerkt, daß unterschiedliche Verteilungsdichten $p_{\varepsilon}(u)$ und $p_{\tilde{\varepsilon}}(u)$ natürlich nicht ausschließen, daß einfache Kenngrößen dieser Dichten übereinstimmen, wie dies in den Beispielen von Abschnitt 9.5 für die quadratischen Mittelwerte der Folgefehler der Fall ist. An diesen Beispielen zeigt sich zudem, daß bereits ein Ersatzsystem erster Ordnung den exakten Wert $\tilde{\sigma}_{\varepsilon}^2$ erzeugen kann, daß also die über $a_1 \varphi_1(u)$ hinausgehenden Anteile des nichtlinearen Ersatzsystems keine Auswirkung auf $\tilde{\sigma}_{\varepsilon}^2$ besitzen.

Aus den vorstehenden Überlegungen wird deutlich, daß die der isolierten Nichtlinearität angepaßte Vorgehensweise zur Konstruktion des nichtlinearen Ersatzsystems in dieser Form nicht durchführbar ist. Es muß vielmehr schon beim Entwurf die Tatsache berücksichtigt werden, daß die Nichtlinearität und das Ersatzsystem unterschiedliche Verteilungsdichten

besitzen. Dies geschieht, indem das Ersatzsystem nicht mit $p_{\hat{\epsilon}}(u)$ sondern mit $p_{\hat{\epsilon}}(u)$ gebildet wird. Zwar ist die Dichte $p_{\hat{\epsilon}}(u)$ ebenfalls unbekannt, jedoch wird sie auch nicht in vollständiger Form benötigt. Nach Abschnitt 3.3 ist die Konstruktion der Orthonormalpolynome bereits dann möglich, wenn die Momente der Dichte bekannt sind. Das n -te Polynom $\varphi_n(u)$, das bezüglich $p_{\hat{\epsilon}}(u)$ zu allen Polynomen geringerer oder gleicher Ordnung orthonormal ist, erfordert die Kenntnis aller durch $\mathcal{X}\{\hat{\epsilon}^k\}$ definierten Momente bis zur Ordnung $2n$. Für diese n Momente - Momente ungerader Ordnung treten wegen der vorausgesetzten Mittelwertfreiheit nicht auf - verschafft man sich dann Bestimmungsgleichungen, indem die Verformung der Momente durch den Ersatzkreis formelmäßig angegeben wird. Ein Beispiel einer derartigen Gleichung ist die Glg. (9.23), die die für $\varphi_1(u) = a_1 \sqrt{6_{\hat{\epsilon}}}$ benötigte Verformung von $\mathcal{X}\{\hat{\epsilon}^2\}$ durch den in diesem Fall linearen Ersatzkreis angibt. Bei der Anpassung des Ersatzsystems an die nichtlineare Kennlinie, also der Bestimmung von $a_v = \mathcal{X}\{f_v(\hat{\epsilon}) \varphi_v(\hat{\epsilon})\}$, kann ebenfalls auf die Kenntnis der vollständigen Dichte $p_{\hat{\epsilon}}(u)$ verzichtet werden, indem nämlich $p_{\hat{\epsilon}}(u)$ durch eine GRAM-CHARLIER-Näherung der Ordnung $2n$ ersetzt wird. Diese Näherung bewahrt bekanntlich gerade die Momente einschließlich $\mathcal{X}\{\hat{\epsilon}^{2n}\}$, so daß auch die Koeffizienten a_v in Abhängigkeit von den Momenten des Eingangssignals $\hat{\epsilon}$ angegeben werden können.

Damit liegen zunächst zwei Sätze von Gleichungen vor, aus denen die Momente und die Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden könnten, wenn nicht die Aufstellung des ersten Gleichungssatzes, die sog. Regelkreisgleichungen, zu weiteren Schwierigkeiten führen würde. Diesen Schwierigkeiten und ihrer Überwindung ist der verbleibende Teil dieser Arbeit gewidmet.

Man erkennt, daß die hier skizzierte Anwendung des nichtlinearen Ersatzsystems im Fall $n=1$ auf die geläufige linearisierte Behandlung des nichtlinearen Kreises mit der äquivalenten Verstärkung führt. Die GRAM-CHARLIER-Näherung reduziert sich dann zwangsläufig auf die GAUSSsche Verteilungsdichte.

10.2 DIE GAUSSsche ANNAHME IM NICHTLINEAREN ERSATZKREIS

Die einfachste $p_{\tilde{\epsilon}}(u)$ charakterisierende Kenngröße ist die Varianz $\tilde{\epsilon}^2$, die sich entweder als Nullwert der Autokorrelationsfunktion $\phi_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}(\tau)$ oder durch Integration über das Leistungsdichtespektrum $S_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}(\omega)$ ergibt. Um die Auswirkung des nichtlinearen Kreises auf diese Funktionen und damit auf $\tilde{\epsilon}^2$ zu erhalten, wird ausgehend von $w(t) = \tilde{\epsilon}(t) + x(t)$ die Autokorrelationsfunktion $\phi_{ww}(\tau)$ gebildet:

$$\phi_{ww}(\tau) = \phi_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}(\tau) + \phi_{\tilde{\epsilon}x}(\tau) + \phi_{x\tilde{\epsilon}}(\tau) + \phi_{xx}(\tau) .$$

Mit den Beziehungen

$$\phi_{\tilde{\epsilon}x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \phi_{\tilde{\epsilon}y}(\tau-u) du = \phi_{x\tilde{\epsilon}}(-\tau)$$

und

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(v) \cdot \phi_{yy}(\tau+u-v) du dv ,$$

$g(t)$ ist hier die Gewichtsfunktion des linearen Systems, können die Korrelationsfunktionen auf den Ausgang des Ersatzsystems bezogen werden.

Man erhält so die grundlegende Beziehung

$$\begin{aligned} \phi_{ww}(\tau) = \phi_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} g(u) [\phi_{\tilde{\epsilon}y}(\tau-u) + \phi_{y\tilde{\epsilon}}(\tau+u)] du \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) g(v) \phi_{yy}(\tau+u-v) du dv \end{aligned} \quad (10. 1a)$$

Durch WK-Transformation dieser Beziehung folgt als äquivalente Aussage im Spektralbereich:

$$\begin{aligned} S_{ww}(\omega) = S_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}(\omega) + F(j\omega) \cdot S_{\tilde{\epsilon}y}(\omega) + F^*(j\omega) S_{y\tilde{\epsilon}}(\omega) + \\ + |F(j\omega)|^2 S_{yy}(\omega) \end{aligned} \quad (10. 1b)$$

Diese zweidimensionalen Grundgleichungen des nichtlinearen Regelkreises enthalten als unbekannte Größen nur noch solche statistische Kennfunktionen, die in unmittelbarem Zusammenhang mit dem nichtlinearen System stehen. Werden in Glg. (10.1b) die WK-Transformierten der in Abschnitt 8.1 hergeleiteten Korrelationsfunktionen eingesetzt, so folgt mit der Abkürzung $\tilde{S}_{i,k}(\omega) := \text{WK} \{a_{i,k}(\tau)\}$ für ein Ersatzsystem dritter Ordnung beispielsweise:

$$\begin{aligned} S_{ww}(\omega) = S_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}(\omega) + |F|^2 \{a_1^2 \tilde{S}_{1,1}(\omega) + a_1 a_3 [\tilde{S}_{1,3}(\omega) + \tilde{S}_{3,1}(\omega)] + a_3^2 \tilde{S}_{3,3}(\omega)\} + \\ + \tilde{\epsilon} a_1 [F + F^*] \tilde{S}_{1,1}(\omega) + \tilde{\epsilon} a_3 [F \tilde{S}_{1,3}(\omega) + F^* \tilde{S}_{3,1}(\omega)] . \end{aligned}$$

Nach einiger Umformung erhält man hieraus die gesuchte Spektralfunktion $S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega)$ wie folgt:

$$S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega) = \frac{S_{ww}(\omega)}{|1+K \cdot F(j\omega)|^2} - \left| \frac{F(j\omega)}{1+K \cdot F(j\omega)} \right|^2 c_3^2 \tilde{S}_{3,3}(\omega) - 2 \sigma_{\hat{\epsilon}} c_3 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F(j\omega)}{1+K \cdot F(j\omega)} \tilde{S}_{1,3}(\omega) \right\} \quad (10.2)$$

Dabei ist mit $K = 1/\sigma_{\hat{\epsilon}}$ die äquivalente Verstärkung eingeführt worden. Besitzt der Folgefehler $\hat{\epsilon}$ eine Verbunddicke mit Diagonalentwicklung, so folgt anstelle von (10.2) der einfachere Ausdruck:

$$S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega) = \frac{S_{ww}(\omega)}{|1+K \cdot F(j\omega)|^2} - \left| \frac{F(j\omega)}{1+K \cdot F(j\omega)} \right|^2 \sum_{\substack{\nu=3 \\ \nu \text{ ungerade}}}^n c_{\nu}^2 \tilde{S}_{\nu,\nu}(\omega) \quad (10.3)$$

Sowohl (10.2) wie auch (10.3) bietet aber zunächst noch keine Möglichkeit zur Berechnung von $S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega)$, da die Funktionen $\tilde{S}_{i,k}(\omega)$ statistische Kennfunktionen der Ordnung $i+k$ darstellen, die im allgemeinen nicht durch die Kenngrößen zweiter Ordnung ausdrückbar sind. Der explizite Zusammenhang von $\tilde{S}_{1,3}(\omega)$ und $\tilde{S}_{3,3}(\omega)$ mit den Momentfunktionen höherer Ordnung kann Abschnitt 8.1 entnommen werden.

Eine der Ausnahmen, für die bereits aus Gleichung (10.3) auf $S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega)$ und damit auf $\sigma_{\hat{\epsilon}}^2$ geschlossen werden kann, ergibt sich für den Fall eines GAUSSverteilten Folgefehlers, denn dann können bekanntlich sämtliche Kenngrößen von höherer als zweiter Ordnung auf solche der Ordnung Zwei zurückgeführt werden. Mit $\tilde{S}_{\nu,\nu}(\omega) := \operatorname{WK} \{ \varphi_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}^{\nu}(\tau) \}$ nimmt Glg. (10.3) dann folgende, nur noch Kenngrößen zweiter Ordnung enthaltende Form an:

$$S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega) = \frac{S_{ww}(\omega)}{|1+K \cdot F(j\omega)|^2} - \left| \frac{F(j\omega)}{1+K \cdot F(j\omega)} \right|^2 \cdot \sum_{\nu=3}^n c_{\nu}^2 \operatorname{WK} \{ \varphi_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}^{\nu}(\tau) \} \quad (10.4)$$

Wegen $\operatorname{WK} \{ \varphi_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}^{\nu}(\tau) \} = \sigma_{\hat{\epsilon}}^{2\nu} \operatorname{WK} \{ [\operatorname{WK}^{-1} \{ S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega) \}]^{\nu} \}$ stellt (10.4) eine Integralgleichung für das Leistungsdichtespektrum des Folgefehlers dar.

Die darin enthaltenen Parameter $K, c_3, \dots, c_n$ sind wiederum Funktionen der Varianz $\sigma_{\hat{\epsilon}}^2$, die aus Glg. (5.17) berechnet werden können.

Das so erhaltene Gleichungssystem kann sehr einfach durch ein Iterationsverfahren gelöst werden. Zunächst wird ein Wert $K^{(0)}$ als Startwert vorgegeben und dann

$$S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}^{(0)}(\omega) = \frac{S_{ww}(\omega)}{|1+K^{(0)} \cdot F(j\omega)|^2}$$

bestimmt. Hieraus erhält man $\phi_{\tilde{e}\tilde{e}}^{(0)}(\tau)$ sowie die Varianz $\tilde{\sigma}_{\tilde{e}}^{(0)2}$, mit der $c_3^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}$ bestimmt werden. Die Iteration erfolgt dann gemäß der Vorschrift

$$S_{\tilde{e}\tilde{e}}^{(k+1)}(\omega) = \frac{S_{ww}(\omega)}{|1+K^{(k)}F(j\omega)|^2} - \left| \frac{F(j\omega)}{1+K^{(k)}F(j\omega)} \right|^2 \sum_{\nu=3}^n c^{(k)2} \cdot WK\{S_{\tilde{e}\tilde{e}}^{(k)\nu}(\tau)\}$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{e}}^{(k+1)2} = \int_0^\infty S_{\tilde{e}\tilde{e}}^{(k+1)}(\omega) d\omega,$$

wobei nach jedem Iterationsschritt die Zwischengrößen $K, c_3, \dots, c_n$ neu bestimmt werden.

Bei mehreren durchgerechneten Beispielen hat sich dieses Verfahren als sehr schnell konvergierend und unempfindlich gegenüber einer Änderung der Startwerte erwiesen. Zumeist wurde bereits nach sechs Iterationsschritten eine Genauigkeit von sieben Dezimalen erreicht.

Auf weitere, numerische Ergebnisse betreffende Einzelheiten sei hier verzichtet. Stattdessen soll der Zusammenhang mit in der Literatur zu findenden Aussagen aufgezeigt werden. Dazu sei nochmals daran erinnert, daß die hier benutzte Darstellung der Autokorrelationsfunktion für den Ausgangsprozeß des Ersatzsystems übereinstimmt mit dem Näherungsausdruck, der sich durch Abbruch der Reihenentwicklung der Autokorrelierten am Ausgang der Nichtlinearität ergibt (s. Abschn. 8.1). Sämtliche bisher publizierten Arbeiten, z.B. [41/42/23] gehen von diesem Näherungsausdruck aus und gelangen dann zwangsläufig zu ähnlichen Ergebnissen. Die Tatsache, daß die linearisierte Behandlung des nichtlinearen Kreises mit Hilfe der äquivalenten Verstärkung sich als Spezialfall des erweiterten, von Glg. (10.4) ausgehenden Verfahrens ergibt, wird dort als notwendige Eigenschaft eines "verbesserten" Verfahrens interpretiert. Bei der in der vorliegenden Arbeit gewählten Vorgehensweise ergibt sich dagegen auch eine phänomenologische Erklärung, da die linearisierte Behandlung ja gerade dem Fall eines Ersatzsystems erster Ordnung entspricht, und folglich in (10.4) $c_\nu = 0$ für $\nu > 1$ zu setzen ist.

Während die in den genannten Arbeiten rein formal durch Reihenabbruch gewonnenen Ergebnisse nur sehr schwer eine heuristische Erklärung zulassen, kann mit dem nichtlinearen Ersatzsystem sofort eine qualitative Aussage über die zu erwartenden Ergebnisse gegeben werden. Wird die mit

der äquivalenten Verstärkung bestimmte Varianz des Folgefehlers durch $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ gekennzeichnet, so folgt aus Gleichung (10.4) sofort $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2 > \sigma_{\epsilon}^2$ für $n > 1$ und $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2 \equiv \sigma_{\epsilon}^2$ für $n=1$, denn bei Berücksichtigung von Koeffizienten $c_3, \dots$ werden in (10.4) nur positive Glieder subtrahiert. Weiter wird sowohl bei einem Ersatzsystem erster Ordnung wie auch bei nichtlinearen Ersatzsystemen ein GAUSSscher Eingangsprozeß vorausgesetzt. Für einen linearisierten Kreis ergibt sich diese Annahme bei einem GAUSSschen Führungsgeräusch von selbst, für einen nichtlinearen Ersatzkreis dagegen ist diese Annahme sicher falsch. Die Berücksichtigung von Koeffizienten $c_3, \dots, c_n$ in (10.4) kann daher auch zu keinem verbesserten Schätzwert für die exakte Varianz σ_{ϵ}^2 führen. Es gilt

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon}^2 \leq \tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2 < \sigma_{\epsilon}^2. \quad (10.5)$$

H.W. SMITH [41] gelangt zu vergleichbaren Aussagen anhand einfacher Beispiele (I-Glied als Linearteil), für die er $p_{\epsilon}(u)$ und daraus folgend σ_{ϵ}^2 exakt berechnet. Bei PERVOZVANSKI [23] und PYATNITSKII [42] dagegen werden die für σ_{ϵ}^2 erhaltenen Werte aufgrund fehlender Vergleiche als Verbesserung der entsprechenden für $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ gewonnenen Ergebnisse angegeben.

Bei einem schwach nichtlinearen Verhalten des Kreises wird $p_{\epsilon}(u)$ nur wenig von der GAUSSschen Form abweichen. Folglich wird $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ einen recht guten Schätzwert für σ_{ϵ}^2 ergeben. Außerdem wird aber die GAUSSsche Annahme für $p_{\epsilon}(u)$ nur zu geringen Unterschieden zwischen $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ und σ_{ϵ}^2 führen. Das die Koeffizienten $c_3, \dots, c_n$ und somit den Verzerrungsanteil der isolierten Nichtlinearität berücksichtigende erweiterte Verfahren bietet daher die Möglichkeit, die Anwendbarkeit einer statistischen Linearisierung im geschlossenen Regelkreis zu überprüfen. Um einen verbesserten Schätzwert für σ_{ϵ}^2 zu erhalten, ist das Verfahren untauglich.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die vorstehenden Aussagen auch auf den Fall eines harmonischen Führungssignals übertragen werden können. Wegen $a_{k,k}(\tau) = \cos k \omega_0 \tau$ können ebenfalls alle Kenngrößen höherer Ordnung durch die Autokorrelationsfunktion ausgedrückt werden, so daß Gleichung (10.1a) auf eine Bestimmungsgleichung für $\varphi_{\epsilon\epsilon}(\tau)$ führt.

11 EIN ANSATZ ZUR BEHANDLUNG VON REGELKREISEN MIT EINER KUBISCHEN NICHTLINEARITÄT

Die Ausführungen des letzten Abschnittes zeigen die Notwendigkeit auf, für den Folgefehler des nichtlinearen Ersatzsystems eine von der GAUSS-schen Dichte abweichende Verbunddichte zu berücksichtigen. Gleichbedeutend damit ist die Berücksichtigung von Kennfunktionen $a_{i,k}(\tau)$, $i+k>2$, die nicht durch $a_{1,1}(\tau)$ bestimmbar sind. Folglich müssen auch für diejenigen Momentfunktionen höherer Ordnung, die in den Funktionen $a_{i,k}(\tau)$ enthalten sind, Gleichungen entsprechend (10.2) aufgestellt werden.

Die Verhältnisse vereinfachen sich, wenn eine Kennlinie in reiner Polynomform vorliegt, da dann die Grundgleichungen einen direkten Zusammenhang zwischen den Momentfunktionen bzw. den entsprechenden Funktionen im Spektralbereich geben. Dies kann erreicht werden, indem gleiche Potenzen der Ersatzkennlinie, die ja als Linearkombination von Polynomen gegeben ist, zusammengefaßt werden. Man gelangt so zu einer Polynomdarstellung der Ersatzkennlinie, deren Koeffizienten von den Größen a_v , $v=1, \dots, n$ und damit von den statistischen Eigenschaften des Eingangssignals abhängen.

In diesem Kapitel wird eine nichtlineare Kennlinie der Form

$$f(u) = au + bu^3 \text{ mit } a, b = \text{const} \quad (11.1)$$

angenommen. Der Übergang zu parameterabhängigen Koeffizienten und damit zu einem nichtlinearen Ersatzkreis erfolgt im abschließenden Kapitel 12.

Bei der Bestimmung der zweidimensionalen Grundgleichung des nichtlinearen Kreises (s. Bild 9.10a) kann wie in Abschnitt 10.2 verfahren werden. In den Gleichungen (10.1a,b) sind die durch $y = a\varepsilon + b\varepsilon^3$ bewirkten Korrelations- bzw. Leistungsdichtefunktionen einzusetzen. Für die Korrelationsfunktionen erhält man sofort:

$$\phi_{yy}(\tau) = a^2 \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + ab [\phi_{\varepsilon\varepsilon^3}(\tau) + \phi_{\varepsilon^3\varepsilon}(\tau)] + b^2 \phi_{\varepsilon^3\varepsilon^3}(\tau)$$

$$\phi_{\varepsilon y}(\tau) = a \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + b \phi_{\varepsilon\varepsilon^3}(\tau)$$

$$\phi_{y\varepsilon}(\tau) = a \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + b \phi_{\varepsilon^3\varepsilon}(\tau)$$

Nach Einsetzen der zugehörigen Spektralfunktion in Gleichung (10.1b) und einiger Umformung ergibt sich die Bestimmungsgleichung für $S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$ wie folgt

$$S_{\epsilon\epsilon}(\omega) = \frac{S_{ww}(\omega)}{|1+aF(j\omega)|^2} - 2b \operatorname{Re} \left\{ \frac{F(j\omega)}{1+aF(j\omega)} S_{\epsilon\epsilon^3}(\omega) \right\} - b^2 \left| \frac{F(j\omega)}{1+aF(j\omega)} \right|^2 S_{\epsilon^3\epsilon^3}(\omega) \quad (11.2)$$

Um das Leistungsdichtespektrum des Folgefehlers zu bestimmen, ist somit infolge der Nichtlinearität die Kenntnis von Kenngrößen vierter und sechster Ordnung notwendig. Eine erste Vereinfachung kann erreicht werden, wenn der Kreis bei beliebigem Leistungspegel des Führungssignals ein nur schwach nichtlineares Verhalten zeigt. Dann ist b offensichtlich klein, so daß Glieder mit b^2 vernachlässigt werden können. Gleichung (11.2) erfordert jetzt nur noch die Kenntnis von $S_{\epsilon\epsilon^3}(\omega)$. Für diese Funktion kann in derselben Weise eine Regelkreisgleichung entsprechend (11.2) aufgestellt werden, die jedoch Funktionen noch höherer Ordnung enthalten wird. Man gelangt so zu einem System von miteinander verkoppelten Regelkreisgleichungen unendlich hoher Ordnung.

Im folgenden Abschnitt werden zunächst einige Zusammenhänge für Moment- und Spektralfunktionen höherer Ordnung bzw. höherer Dimension behandelt. Anschließend wird eine Beziehung für $S_{\epsilon\epsilon^3}(\omega)$ hergeleitet. Das Kapitel schließt ab mit der Diskussion einer Abbruchmöglichkeit des erhaltenen Gleichungssystems.

Die für das Folgende notwendigen Voraussetzungen seien nochmals zusammengestellt:

1. Gegeben sei ein Regelkreis nach Bild 9.10a.
2. $w(t)$ sei ein stationärer GAUSSverteilter Prozeß mit $m_w = 0$.
3. Das nichtlineare Teilsystem werde durch eine kubische Kennlinie der Form $f(u) = au + bu^3$ beschrieben. b sei klein, so daß in den Regelkreisgleichungen Glieder mit b^2 , b^3 , ... als Faktoren vernachlässigt werden können.

11.1 DIE GRUNDGLEICHUNG FÜR $S_{\varepsilon\varepsilon^3}(\omega)$

11.1.1 Mehrdimensionale statistische Kennfunktionen

So wie der quadratische Mittelwert eines Prozesses sich aus der Autokorrelationsfunktion für $\tau = 0$ ergibt, können sämtliche statistische Kenngrößen der Ordnung n durch Spezialisierung aus n -dimensionalen Kennfunktionen gewonnen werden. Aus der Vielzahl der bei $n \geq 4$ möglichen Zusammenhänge seien im folgenden einige Beziehungen für $n = 4$ genannt.

Die vierdimensionale Korrelationsfunktion eines stationären Prozesses $\varepsilon(t)$ wird definiert durch:

$$\phi_{4\varepsilon}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) := \mathbb{E}\{\varepsilon(t) \varepsilon(t+\tau_1) \varepsilon(t+\tau_2) \varepsilon(t+\tau_3)\}. \quad (11.3)$$

Aufgrund der vorausgesetzten Stationarität hängt $\phi_{4\varepsilon}$ von drei unabhängigen Variablen ab und ist symmetrisch in diesen Argumenten. Eine zugeordnete spektrale Kenngröße erhält man aus der verallgemeinerten WK-Transformation:

$$S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{4\varepsilon}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (11.4a)$$

Die inverse Transformation, deren Existenz ebenfalls vorausgesetzt sei, lautet dann

$$\phi_{4\varepsilon}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) := \frac{1}{2^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (11.4b)$$

Daß das durch (11.4a) definierte Spektrum als Distribution zu verstehen ist, sei am Beispiel eines GAUSSschen Prozesses $w(t)$ erläutert. Aus der vierdimensionalen Autokorrelationsfunktion

$$\phi_{4w}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \phi_{ww}(\tau_1)\phi_{ww}(\tau_3 - \tau_2) + \phi_{ww}(\tau_2)\phi_{ww}(\tau_3 - \tau_1) + \phi_{ww}(\tau_3)\phi_{ww}(\tau_2 - \tau_1)$$

folgt durch Anwendung der Transformation (11.4a):

$$\begin{aligned} S_{4w}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= 2 S_{ww}(\omega_1) \cdot S_{ww}(\omega_2) \delta(\omega_2 + \omega_3) + 2 S_{ww}(\omega_2) S_{ww}(\omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_3) \\ &\quad + 2 S_{ww}(\omega_1) S_{ww}(\omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Durch spezielle Wahl der Variablen τ_i ergeben sich aus $\phi_{4\varepsilon}$ folgende spezielle Kenngrößen vierter Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{4\varepsilon}(0,0,0) &= m_{\varepsilon_4} \quad (\equiv \mu_{\varepsilon_4} \text{ bei } m_{\varepsilon} = 0) \\ \phi_{4\varepsilon}(0,0,\tau) &= \phi_{4\varepsilon}(0,\tau,0) = \phi_{4\varepsilon}(\tau,0,0) = \phi_{\varepsilon^3\varepsilon}(\tau) \\ \phi_{4\varepsilon}(\tau,\tau,\tau) &= \phi_{\varepsilon^3\varepsilon}(\tau) = \phi_{4\varepsilon}(-\tau,0,0) \\ \phi_{4\varepsilon}(0,\tau,\tau) &= \phi_{\varepsilon^2\varepsilon^2}(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (11.6a)$$

Im Spektralbereich entsprechen diesen Aussagen folgende Zusammenhänge

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon\{\varepsilon^4\} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ S_{\varepsilon^3\varepsilon}(\omega) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty S_{4\varepsilon}(\omega, \omega_2, \omega_3) d\omega_2 d\omega_3 \\ S_{\varepsilon\varepsilon^3}(\omega) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty S_{4\varepsilon}(\omega - \omega_2 - \omega_3, \omega_2, \omega_3) d\omega_2 d\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (11.6b)$$

Die letzte Beziehung ergibt sich beispielsweise folgendermaßen:

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon\varepsilon^3}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \phi_{4\varepsilon}(\tau, \tau, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\tau} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \iiint S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-j(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\tau} d\tau \right)}_{=: \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty S_{4\varepsilon}(\omega - \omega_2 - \omega_3, \omega_2, \omega_3) d\omega_2 d\omega_3 \end{aligned}$$

Für einen GAUSSschen mittelwertfreien Prozeß $w(t)$ folgt insbesondere mit (11.5)

$$S_{w^3w}(\omega) = S_{ww^3}(\omega) = 3\sigma_w^2 \cdot S_{ww}(\omega) \quad (11.7)$$

Schließlich wird noch eine weitere wichtige Beziehung benötigt, die die durch ein lineares System mit dem Frequenzgang $F(j\omega)$ bewirkte Verformung eines Prozesses $y(t)$ in einen Prozeß $x(t)$ kennzeichnet. Es gilt [23], S.42:

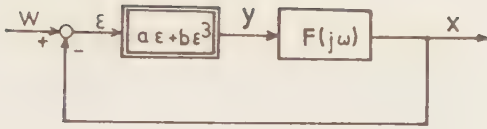
$$S_{(n+1)x}(\omega_1, \dots, \omega_n) = F(j\omega_1) \cdot \dots \cdot F(j\omega_n) \cdot F^*(j\omega_1 + \dots + j\omega_n) \cdot S_{(n+1)y}(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad (11.8)$$

Für $n=1$ erhält man hieraus die gewohnte Wirkleistungs-Übertragungsbeziehung

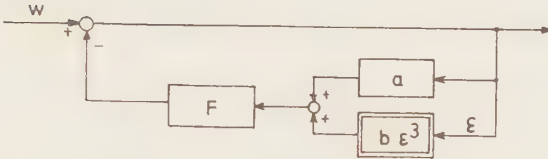
$$S_{2x}(\omega) = F(j\omega) F^*(j\omega) S_{2y}(\omega)$$

11.1.2 Die allgemeine Regelkreisgleichung für $S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

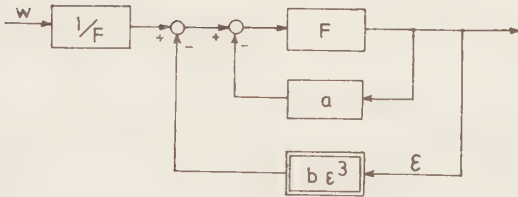
Es wird eine Beziehung vom Typ (11.2) für $S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ aufgestellt und daraus gemäß Glg. (11.6b) $S_{\varepsilon\varepsilon^3}(\omega)$ durch zweimalige Integration bestimmt. Dabei ist jedoch ein beträchtlicher Aufwand erforderlich, denn die zunächst auftretenden Kennfunktionen für y wie etwa $\phi_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ müssen mit $y = a\varepsilon + b\varepsilon^3$ auf ε bezogen werden. Dies führt zu einer großen Zahl von Summanden. Einfachere und vor allem übersichtlichere Verhältnisse ergeben sich, wenn eine Strukturumformung des gegebenen Regelkreises derart vorgenommen wird, daß der lineare Anteil $a \cdot \varepsilon$ aus der Nichtlinearität herausgelöst wird. Diese Umformung ist den Bildern 11.1a bis 11.1f zu entnehmen.



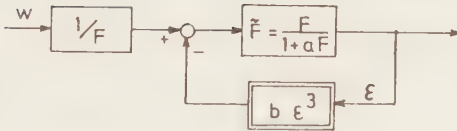
a



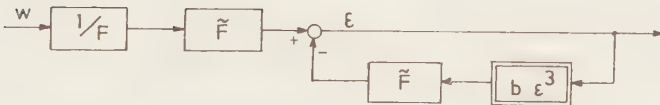
b



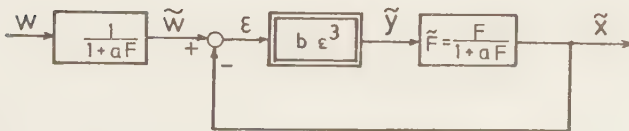
c



d



e



f

Bild 11.1 a-f

Bezüglich der Verformung von ε aus w sind die Regelkreise von Bild 11.1a und Bild 11.1f gleichwertig, so daß für die weiteren Überlegungen der letzte Kreis als Ausgangspunkt benutzt werden kann.

Mit den Abkürzungen $\tilde{x}_i := \tilde{x}(t+\tau_i)$, $i=1,2,3$ und $\tilde{x}_0 := \tilde{x}(t)$ folgt nun

$$\begin{aligned} \Phi_{4W}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= E\{(\varepsilon_0 + \tilde{x}_0) (\varepsilon_1 + \tilde{x}_1) (\varepsilon_2 + \tilde{x}_2) (\varepsilon_3 + \tilde{x}_3)\} = \\ &= \underline{E\{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3\}} + \underline{E\{\tilde{x}_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3\}} + \underline{E\{\varepsilon_0 \tilde{x}_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3\}} + E\{\tilde{x}_0 \tilde{x}_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3\} \\ &\quad + \underline{E\{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \tilde{x}_2 \varepsilon_3\}} + \underline{E\{\tilde{x}_0 \varepsilon_1 \tilde{x}_2 \varepsilon_3\}} + E\{\varepsilon_0 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \varepsilon_3\} + E\{\tilde{x}_0 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \varepsilon_3\} \\ &\quad + \underline{E\{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tilde{x}_3\}} + \underline{E\{\tilde{x}_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tilde{x}_3\}} + E\{\varepsilon_0 \tilde{x}_1 \varepsilon_2 \tilde{x}_3\} + E\{\tilde{x}_0 \tilde{x}_1 \varepsilon_2 \tilde{x}_3\} \\ &\quad + E\{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3\} + E\{\tilde{x}_0 \varepsilon_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3\} + \underline{E\{\varepsilon_0 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3\}} + \underline{E\{\tilde{x}_0 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3\}} \end{aligned}$$

Die $\tilde{x}_i$ enthaltenden Erwartungswerte müssen auf y und anschließend mit $y = b\varepsilon^3$ auf ε bezogen werden. Nach Voraussetzung werden nur die Summanden berücksichtigt, die den Faktor b höchstens in der ersten Potenz enthalten. Daher liefern nur die unterstrichenen Glieder einen Beitrag. Durch Übergang in den Spektralbereich und Einsetzen der Beziehungen

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tilde{x}_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \tilde{F}(j\omega_3) S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 y_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = b \tilde{F}(j\omega_3) S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3^3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \tilde{x}_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \dots = b \tilde{F}(j\omega_2) S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ S_{\varepsilon_0 \tilde{x}_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \dots = b \tilde{F}(j\omega_1) S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ S_{\tilde{x}_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \dots = b \tilde{F}[-j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)] \cdot S_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{aligned}$$

erhält man die der Gleichung (11.2) entsprechende vierdimensionale Grundgleichung

$$\begin{aligned} S_{4W}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= S_{4E}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \\ &+ b [\tilde{F}(j\omega_1) S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \tilde{F}(j\omega_2) S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \\ &+ \tilde{F}(j\omega_3) S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3^3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \tilde{F}[-j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)] S_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)] \\ &+ o(b) \end{aligned} \quad (11.9)$$

mit der Abkürzung

$$\tilde{F}(j\omega) := \frac{F(j\omega)}{1+a F(j\omega)}.$$

Die Indizierung der Spektralfunktionen in (11.9) deutet auf die zugrunde gelegten Zufallsvariablen hin. So ist beispielsweise

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= WK_3 \left\{ \Phi_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right\} \\ &= WK_3 \left\{ \Psi \{ \varepsilon^3(t) \cdot \varepsilon(t+\tau_1) \cdot \varepsilon(t+\tau_2) \cdot \varepsilon(t+\tau_3) \} \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Sinn ist dann $S_{4\varepsilon}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ eine Kurzform von $S_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Für die linke Seite von (11.9) gilt wegen Gleichung (11.2):

$$S_{4W}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{S_{4W}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{[1+a F(j\omega_1)][1+a F(j\omega_2)][1+a F(j\omega_3)][1+a F(-j(\omega_1+\omega_2+\omega_3))]}.$$

Die für Gleichung (11.2) benötigte Funktion $S_{\varepsilon \varepsilon^3}(\omega)$ kann nun durch zweimalige Integration bestimmt werden. Als zweckmäßiger erweist es sich,

$$S_{\varepsilon \varepsilon^3}(\omega) \text{ aus } S_{\varepsilon \varepsilon^3}(\omega) = WK \{ \Phi_{\varepsilon \varepsilon^3}(\tau) \} = WK \{ \Phi_{4\varepsilon}(\tau, \tau, \tau) \}$$

zu bestimmen, so daß zunächst Gleichung (11.9) in den τ -Bereich transformiert werden muß.

Die ersten drei Summanden " $\tilde{F} \cdot S$ " in (11.9) können sofort als Faltungsprodukte gedeutet werden. Für den vierten Summanden folgt mit $\tilde{g}(u) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{F}(j\omega)\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}[-j(\omega_1+\omega_2+\omega_3)] \cdot S_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \cdot e^{j(\omega_1+\omega_2+\omega_3)u} du \cdot \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(v_1, v_2, v_3) e^{-j(\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \omega_3 v_3)} dv_1 dv_2 dv_3 \\ = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[\omega_1 \underbrace{(v_1-u)}_{=: \tau_1} + \omega_2 \underbrace{(v_2-u)}_{=: \tau_2} + \omega_3 \underbrace{(v_3-u)}_{=: \tau_3}]} \tilde{g}(u) \cdot \Phi_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(v_1, v_2, v_3) du dv_1 dv_2 dv_3 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \Phi_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\tau_1+u, \tau_2+u, \tau_3+u) du \right\} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,$$

so daß $\tilde{F}[-j(\cdot)] S_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}$ sich als WK-Transformierte des inneren Integrals ergibt. Daher folgt:

$$\begin{aligned} \phi_{4W}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \phi_{4E}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \\ &+ b \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \left[\phi_{\varepsilon_0 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\tau_1 - u, \tau_2, \tau_3) + \phi_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \varepsilon_3}(\tau_1, \tau_2 - u, \tau_3) + \right. \\ &\quad \left. + \phi_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3^3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3 - u) + \phi_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\tau_1 + u, \tau_2 + u, \tau_3 + u) \right] du, \end{aligned} \quad (11.10)$$

wo $\tilde{g}(u)$ die Gewichtsfunktion des linearen Teilsystems des umgeformten Regelkreises ist.

Für $\tau_1 = -\tau$, $\tau_2 = \tau_3 = 0$ oder gleichbedeutend $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$ folgt hieraus unter Berücksichtigung, daß wegen der vorausgesetzten Stationarität die Wahl des Zeitbezugspunktes beliebig ist:

$$\phi_{\varepsilon \varepsilon^3}(\tau) = \phi_{\tilde{W} \tilde{W}^3}(\tau) - b \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \left[\phi_{\varepsilon_0^3 \varepsilon_1^3}(\tau + u) + 3 \phi_{\varepsilon_0 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3}(\tau, \tau - u) \right] du \quad (11.11)$$

Glieder von höherer als erster Ordnung in b sind hier wie auch im folgenden vernachlässigt. Mit den Beziehungen (11.9, 10, 11) scheint verglichen mit der zweidimensionalen Grundgleichung (11.2) kein wesentlicher Fortschritt erzielt zu sein, denn diese Gleichungen enthalten jetzt Kenngrößen sechster Ordnung. Jedoch bietet sich nun die Möglichkeit einer Auswertung der erhaltenen Beziehungen, ohne wie in Abschnitt 10.2 auf die GAUSS-Verteilung zurückzugreifen.

11.2 DER LÖSUNGSANSATZ MIT KUMULANTENFUNKTIONEN

In Abschnitt 2.1 wurde bereits auf die Kennzeichnung der Verteilungsdichte durch Kumulanten hingewiesen. Diese Kenngrößen ergeben sich mit der charakteristischen Funktion $\Psi(\cdot)$ als Koeffizienten einer Reihenentwicklung von $\ln \Psi(\cdot)$. Bilden die Zufallsvariablen "Abtastwerte" eines stochastischen Prozesses $x(t)$, so erhält man von den Abtastzeitpunkten abhängende Kumulantenfunktionen $\lambda_{nx}(t_1, \dots, t_n)$ n -ter Ordnung, die wegen $\lambda_{2x}(t_1, t_2) = C_{xx}(t_1, t_2)$ auch als verallgemeinerte Kovarianzfunktionen bezeichnet werden. Die Bedeutung der Kumulanten besteht in den folgenden Feststellungen:

1. Für einen GAUSSschen Prozeß sind alle Kumulanten von höherer als zweiter Ordnung identisch Null [43].

2. Die Kumulantenfunktionen eines linear gefilterten Prozesses gehen bei Frequenzbandbegrenzung des Filters mit wachsender Ordnung gegen Null [44] .

Je GAUSSähnlicher daher ein Prozeß ist, desto weniger Kumulantenfunktionen sind für seine Charakterisierung notwendig. Da zudem bei mittelwertfreien Prozessen alle Kumulanten ungerader Ordnung von vorn herein verschwinden, kann ein Prozeß $\varepsilon(t)$ als GAUSSähnlich bezeichnet werden, wenn die Kumulantenfunktion sechster Ordnung verschwindet:

$$\lambda_{6\varepsilon}(t_1, t_2, \dots, t_6) \equiv 0 \quad (11.12)$$

Die Kumulantenfunktionen können in der Form

$$\lambda_{n\varepsilon}(t_1, \dots, t_n) = \phi_{n\varepsilon}(t_1, \dots, t_n) - \text{fktn} \left\{ \text{Momentfunktionen niedrigerer Dimension} \right\}$$

dargestellt werden. Verschwindet $\lambda_{n\varepsilon}$, so erhält man eine Darstellung der n-dimensionalen Korrelationsfunktion in Abhängigkeit von den Korrelationsfunktionen niedrigerer Dimension.

Aufgrund dieser Feststellung können die in den Gleichungen (11.9,10,11) auftretenden Kenngrößen sechster Ordnung durch solche höchstens vierter Ordnung ausgedrückt werden. Dazu muß vorausgesetzt werden, daß der Folgefehler eine GAUSSähnliche Verteilungsdichte besitzt. Es sei darauf hingewiesen, daß dann sicher auch Glieder mit $b^2, \dots$ vernachlässigt werden können.

Für die Kumulantenfunktion sechster Ordnung erhält man nach der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Vorgehensweise im Fall eines mittelwertfreien Prozesses den folgenden Ausdruck:

$$\lambda_{1, \dots, 6} = \phi_{1, 2, \dots, 6} - \sum_1^{15} [\phi_{\nu_1 \nu_2} \cdot \phi_{\nu_3 \dots \nu_6}] + 2 \sum_1^{15} [\phi_{\nu_1 \nu_2} \cdot \phi_{\nu_3 \nu_4} \cdot \phi_{\nu_5 \nu_6}] ,$$

wo sich die Summen über die jeweils 15 möglichen Permutationen der Indizes $\nu_k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ erstrecken.

Zur Vereinfachung ist hier

$$\lambda_{1,2,\dots,6} := \lambda_{6\varepsilon}(t_1, \dots, t_6)$$

$$\text{und } \phi_{y_1, \dots, y_6} := \phi_{6\varepsilon}(t_1, \dots, t_6) := \xi\{\varepsilon(t_1) \dots \varepsilon(t_6)\}$$

gesetzt worden. Als grundlegende Beziehung hinsichtlich des angestrebten Berechnungsverfahrens für statistische Kenngrößen des Folgefehlers folgt dann mit (11.12):

$$\begin{aligned} \phi_{123456} = & \phi_{12} \phi_{3456} + \phi_{13} \phi_{2456} + \phi_{14} \phi_{2356} + \phi_{15} \phi_{2346} + \phi_{16} \phi_{2345} \\ & + \phi_{23} \phi_{1456} + \phi_{24} \phi_{1356} + \phi_{25} \phi_{1346} + \phi_{26} \phi_{1345} \\ & + \phi_{34} \phi_{1256} + \phi_{35} \phi_{1246} + \phi_{36} \phi_{1245} \\ & + \phi_{45} \phi_{1236} + \phi_{46} \phi_{1235} \qquad \qquad \qquad + \phi_{56} \phi_{1234} - \\ & - 2 \cdot [\phi_{12} (\phi_{34} \phi_{56} + \phi_{35} \phi_{46} + \phi_{36} \phi_{45}) \\ & + \phi_{13} (\phi_{24} \phi_{56} + \phi_{25} \phi_{46} + \phi_{26} \phi_{45}) \\ & + \phi_{14} (\phi_{23} \phi_{56} + \phi_{25} \phi_{36} + \phi_{26} \phi_{35}) \\ & + \phi_{15} (\phi_{23} \phi_{46} + \phi_{24} \phi_{36} + \phi_{26} \phi_{34}) \\ & + \phi_{16} (\phi_{23} \phi_{45} + \phi_{24} \phi_{35} + \phi_{25} \phi_{34})]. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Die benötigten Momentfunktionen niedrigerer Dimension ergeben sich hieraus durch geeignete Gleichsetzung der Zeitpunkte t_i und anschließenden Übergang zur stationären Form. Mit $t_1=t_2=t_3=t$ und $t_4=t_5=t_6=t+\alpha$ erhält man beispielsweise die in Gleichung (11.11) benötigte Funktion $\phi_{\varepsilon^3 \varepsilon^3}(\alpha)$ zu

$$\begin{aligned} \phi_{\varepsilon^3 \varepsilon^3}(\alpha) = & 3 \phi_{\varepsilon^2}^2 \phi_{4\varepsilon}(\alpha, \alpha, \alpha) + 9 \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha) \phi_{4\varepsilon}(0, \alpha, \alpha) + 3 \phi_{\varepsilon}^2 \phi_{4\varepsilon}(0, 0, \alpha) \\ & - 18 \phi_{\varepsilon}^4 \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha) - 12 \phi_{\varepsilon\varepsilon}^3(\alpha) \end{aligned} \quad (11.14a)$$

oder bei Hervorhebung der eindimensionalen Kenngrößen:

$$\begin{aligned} \phi_{\varepsilon^3 \varepsilon^3}(\alpha) = & 9 \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha) \phi_{\varepsilon^2 \varepsilon^2}(\alpha) + 3 \phi_{\varepsilon}^2 [\phi_{\varepsilon\varepsilon^3}(\alpha) + \phi_{\varepsilon^3 \varepsilon}(\alpha)] + \\ & - 18 \phi_{\varepsilon}^4 \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha) - 12 \phi_{\varepsilon\varepsilon}^3(\alpha) . \end{aligned} \quad (11.14b)$$

Ebenso kann auch $\phi_{\varepsilon_0 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3}(\alpha, \beta)$ bestimmt werden. Aus Gleichung (11.11) ergibt sich damit eine Integralgleichung der folgenden Struktur:

$$\phi_{\varepsilon^3}(\tau) = \phi_{\widetilde{w}^3}(\tau) - b \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(u) \cdot I(u, \tau) du \quad (11.15)$$

mit

$$I(u, \tau) = \text{fkt}n[\phi_{\varepsilon^3}(\tau+u), \text{weitere Momentfunktionen 4. Ordnung}].$$

Die für (11.2) benötigte Funktion $\phi_{\varepsilon^3}(\tau)$ ergibt sich somit als Lösung einer Integralgleichung. Erschwerend kommt aber nun hinzu, daß der Integrand weitere zunächst unbekannte Momentfunktionen vierter Ordnung enthält. Für diese können, jeweils ausgehend von Gleichung (11.10), weitere (11.15) entsprechende Bestimmungsgleichungen aufgestellt werden. Man erhält so ein System gekoppelter nichtlinearer Integralgleichungen für sämtliche Momentfunktionen vierter Ordnung. Eine Lösung dieses Systems dürfte nur im Rahmen eines Näherungsverfahrens möglich sein. Grundsätzlich anwendbar ist das Verfahren der sukzessiven Approximation, wobei jedoch die Konvergenzfrage nicht allgemein beantwortet werden kann.

Sowohl die Erstellung des Gleichungssystems wie auch das vorgeschlagene Lösungsverfahren erfordern einen sehr großen Aufwand, der hauptsächlich dadurch verursacht wird, daß alle Momentfunktionen vierter Ordnung bestimmt werden müssen. Ist man nur an Kenngrößen zweiter Ordnung interessiert, so scheint ein derartiger Aufwand nicht gerechtfertigt. Im abschließenden Kapitel soll daher eine Methode beschrieben werden, die mit wesentlich weniger Aufwand die genäherte Bestimmung von ϕ_{ε}^2 ermöglicht.

12 EIN QUASI-LINEARES NÄHERUNGSVERFAHREN BEI NICHT-GAUSSscher DICHT DES FOLGEFEHLERS

In Abschnitt 9.5 sind die zwei Grenzfälle einer quasilinearen Behandlung des nichtlinearen Kreises aufgezeigt worden. Diese Grenzfälle bestehen darin, daß für das stochastische Eingangssignal des Ersatzsystems eine GAUSS-Verteilung oder aber die exakte Verteilung angenommen wird. Die zweite Annahme führt zu der Übereinstimmung von $\sigma_\epsilon^2|_{\text{exakt}}$ und $\sigma_{\epsilon_L}^2$. Diese Feststellung läßt erwarten, daß man einen besseren Schätzwert für die exakte Varianz σ_ϵ^2 erhält, wenn $p_\epsilon(u)$ durch die GRAM-CHARLIER-Näherung vierter Ordnung angenähert wird:

$$p_\epsilon(u) \cong \tilde{p}_4(u) = \varphi_\epsilon(u) \left[1 + \frac{b_4}{\sqrt{4!}} H_4\left(\frac{u}{\sigma_\epsilon}\right) \right] .$$

Die Auswertung der äquivalenten Verstärkung mit $\tilde{p}_4(u)$ ist gleichbedeutend damit, den nichtverschwindenden Exzeß von ϵ zu berücksichtigen. Damit ist eine direkte Verallgemeinerung der BOOTON'schen Methode gegeben, denn diese setzt ja gerade $\gamma_\epsilon \equiv 0$ voraus. Die Berücksichtigung des Exzesses ist wegen $\gamma_\epsilon = \mu_{\epsilon_4}/\sigma_\epsilon^4 - 3$ gleichbedeutend mit der Berücksichtigung von $\mu_{\epsilon_4} \neq 3\sigma_\epsilon^4$. Dies erfolgt mit Hilfe der im letzten Kapitel gewonnenen Ergebnisse zunächst wieder für eine kubische Kennlinie. Anschließend folgt die Erweiterung auf beliebige Nichtlinearitäten und die Überprüfung an einem Beispiel. Eine Gegenüberstellung der verschiedenen Verfahren beschließt die vorliegende Arbeit.

12.1 REGELKREIS MIT KUBISCHER NICHTLINEARITÄT

Für die kubische Nichtlinearität mit der Kennlinie $f(u) = a u + b u^3$ lautet die durch $K := \frac{\mathbb{E}\{\epsilon y\}}{\sigma_\epsilon^2}$ definierte äquivalente Verstärkung wegen $m_\epsilon = 0$:

$$K = a + b \frac{\mu_{\epsilon_3}}{\sigma_\epsilon^2} . \quad (12.1)$$

Die Varianz und das vierte Zentralmoment werden nun mit Hilfe der Regelkreisgleichungen des letzten Kapitels ersetzt.

Zunächst folgt aus Gleichung (11.2) durch WK-Rücktransformation für $\tau = 0$ der Zusammenhang

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_w^2 - 2b \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \phi_{\epsilon_3\epsilon}(u) du, \quad (12.2)$$

wobei der Term mit b^2 bereits vernachlässigt worden ist. Zur Bestimmung von μ_{ϵ_4} wird die Gleichung (11.10) herangezogen. Wegen $\phi_{4\epsilon}(0,0,0) = \mu_{\epsilon_4}$ folgt

$$\mu_{\epsilon_4} = \mu_{\tilde{w}_4} - 4 b \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \phi_{\epsilon^3 \epsilon^3}(u) du.$$

Wird hier der unter der Voraussetzung $\lambda_1, \dots, 6 = 0$ hergeleitete Ausdruck (11.14b) für $\phi_{\epsilon^3 \epsilon^3}(u)$ berücksichtigt, so erhält man

$$\mu_{\epsilon_4} = \mu_{\tilde{w}_4} - 12 b \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \left[3 \phi_{\epsilon \epsilon}(u) \phi_{\epsilon^2 \epsilon^2}(u) + 2 \epsilon_{\epsilon}^2 \phi_{\epsilon^3 \epsilon}(u) - 6 \epsilon_{\epsilon}^4 \phi_{\epsilon \epsilon}(u) - 4 \phi_{\epsilon \epsilon}^3(u) \right] du.$$

Störend wirken nun noch die in dieser Beziehung enthaltenen Momentfunktionen vierter Ordnung. Da $\phi_{\epsilon^2 \epsilon^2}(\tau)$ in der Grundbeziehung (12.2) für die gesuchte Varianz ϵ_{ϵ}^2 nicht enthalten ist, wirkt sich eine genäherte Bestimmung von $\phi_{\epsilon^2 \epsilon^2}(\tau)$ nur sekundär auf ϵ_{ϵ}^2 aus, so daß die Momentfunktion durch den für einen GAUSSschen Prozeß geltenden Ausdruck

$$\phi_{\epsilon^2 \epsilon^2}(\tau) = 2 \phi_{\epsilon \epsilon}^2(\tau) + \epsilon_{\epsilon}^{-4}$$

ersetzt werden kann. Diese Beziehung ergibt sich analog zu dem in Abschnitt 3.2 beschriebenen Beispiel. Man erhält dann

$$\mu_{\epsilon_4} = \mu_{\tilde{w}_4} - 12 b \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \left[2 \epsilon_{\epsilon}^2 \phi_{\epsilon^3 \epsilon}(u) - 3 \epsilon_{\epsilon}^4 \phi_{\epsilon \epsilon}(u) + 2 \phi_{\epsilon \epsilon}^3(u) \right] du.$$

Die verbleibende Funktion vierter Ordnung wird mittels der Beziehung (12.2) eliminiert. Das führt auf

$$\mu_{\epsilon_4} = \mu_{\tilde{w}_4} + 12 \epsilon_{\epsilon}^2 (\epsilon_{\epsilon}^2 - \epsilon_{\tilde{w}}^2) + 12 \epsilon_{\epsilon}^6 b \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u) \left[3 \phi_{\epsilon \epsilon}(u) - 2 \phi_{\epsilon \epsilon}^3(u) \right] du.$$

$\tilde{w}(t)$ geht durch lineare Verformung aus dem nach Voraussetzung GAUSSverteilten Prozeß $w(t)$ hervor. Daher besitzt $\tilde{w}(t)$ ebenfalls eine GAUSSsche Dichte und es gilt $\mu_{\tilde{w}_4} = 3 \epsilon_{\tilde{w}}^4$. Damit ergibt sich aber die grundlegende Beziehung

$$\mu_{\epsilon_4} = 3 [\epsilon_{\tilde{w}}^2 - 2 \epsilon_{\epsilon}^2]^2 - 12 \epsilon_{\epsilon}^6 b \int_0^{\infty} \tilde{g}(u) \left[3 \phi_{\epsilon \epsilon}(u) - 2 \phi_{\epsilon \epsilon}^3(u) \right] du \quad (12.3)$$

$$\text{mit} \quad \epsilon_{\tilde{w}}^2 = \int_0^{\infty} \frac{S_{\tilde{w}\tilde{w}}(\omega)}{|1 + a F(j\omega)|^2} d\omega \quad (12.4)$$

$$\text{und} \quad \tilde{g}(u) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{F(j\omega)}{1 + a F(j\omega)} \right\} \quad (12.5)$$

Andererseits ergibt sich für den linearisierten Kreis mit der durch (12.1) festgelegten äquivalenten Verstärkung K:

$$\phi_{\epsilon\epsilon}(\tau) = WK^{-1} \left\{ \frac{S_{WW}(\omega)}{|1+KF(j\omega)|^2} \right\} \quad (12.6)$$

und hieraus

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \phi_{\epsilon\epsilon}(0) = \int_0^{\infty} \frac{S_{WW}(\omega)}{|1+KF(j\omega)|^2} d\omega. \quad (12.7)$$

Für die Bestimmung von σ_{ϵ}^2 stehen damit die Gleichungen (12.1), (12.3), (12.6) und (12.7) zur Verfügung. Nimmt man den Beweisgang von Abschnitt 9.5 als Leitlinie, so gelangt man zu folgendem Näherungsverfahren:

- Start: Es wird ein Startwert für K vorgegeben. Möglichkeiten dafür sind z.B. $K=a$, $K=1$, $K=K_{\text{GAUSS}}$.
- Schritt 1: Aus den Gleichungen (12.6) und (12.7) werden σ_{ϵ}^2 und $\phi_{\epsilon\epsilon}(\tau)$ jeweils als Funktion von K ermittelt.
- Schritt 2: Aus Gleichung (12.3) wird μ_{ϵ_4} mit den zuvor bestimmten Werten von K und σ_{ϵ}^2 errechnet.
- Schritt 3: Aus Gleichung (12.1) wird ein neuer Wert für die äquivalente Verstärkung bestimmt, der als neuer Startwert benutzt wird. Nun wird die Prozedur beginnend bei Schritt 1 wiederholt.
- Abbruch: Das Verfahren ist abzubrechen, wenn die Werte für σ_{ϵ}^2 bei zwei aufeinander folgenden Durchläufen genügend gut übereinstimmen (Konvergenz des Verfahrens) oder aber das Verfahren instabil wird.

Eine weitere Diskussion des hier beschriebenen Iterationsverfahrens wird im Anschluß an die Erweiterung auf beliebige statische Nichtlinearitäten erfolgen.

12.2 ERWEITERUNG AUF BELIEBIGE STATISCHE NICHTLINEARITÄTEN

Der Übergang zu einem Regelkreis mit einer beliebigen Nichtlinearität erfolgt durch Ersetzen der Nichtlinearität durch ein nichtlineares Ersatzsystem dritter Ordnung. Die nicht-GAUSSsche Dichte $p_{\xi}(u)$ des Folgefehlers im Ersatzkreis wird durch eine GRAM-CHARLIER-Näherung vierter Ordnung approximiert, so daß das Ersatzsystem die in Abschnitt 7.2 angegebene Darstellung

$$\tilde{g}_3(u) = \tilde{a}_1 \varphi_1(u) + \tilde{a}_3 \tilde{\varphi}_3(u) \quad (12.8)$$

besitzt. Dabei ist $\varphi_1(u) = \sigma_{\xi}^{-1}u$; $\tilde{\varphi}_3(u)$ wird durch Gleichung (7.11) festgelegt, und die Koeffizienten $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_3$ bestimmen sich gemäß (7.13) und (7.14) aus χ_{ξ}^2 und den in Kapitel 6 teils tabellierten GAUSS-Koeffizienten c_k . Das benutzte Ersatzsystem ist damit an die Nichtlinearität und die nicht-GAUSSsche Eingangsdichte angepaßt. Durch Zusammenfassen der Potenzen gleichen Grades folgt für (12.8) die äquivalente Darstellung

$$\tilde{g}_3(u) = a u + b u^3 \quad (12.9)$$

wo a und b nun von σ_{ξ}^2 und χ_{ξ}^2 abhängen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sigma_{\xi}^2} \left[\tilde{a}_1 - \frac{\chi_{\xi}^2 + 3}{W} \tilde{a}_3 \right] \\ b &= \frac{\tilde{a}_3}{\sigma_{\xi}^2 W} \end{aligned} \quad (12.10)$$

mit $W := \sqrt{6 + 9\chi_{\xi}^2 - \sigma_{\xi}^2}$ (vergl. Abschnitt 7.2).

Durch (12.9) und (12.10) ist der Anschluß an die für kubische Nichtlinearitäten angestellten Überlegungen des Kapitels 11 und insbesondere des letzten Abschnitts gegeben. Sämtliche diesbezüglichen Feststellungen können sofort angewendet werden, wenn sie dahingehend erweitert werden, daß die Kennlinienkoeffizienten a und b von dem Exzeß χ_{ξ}^2 und der Streuung σ_{ξ}^2 abhängen.

So kann etwa das in Abschnitt 11.2 beschriebene Gleichungssystem zur Bestimmung sämtlicher Momentfunktionen zweiter und vierter Ordnung sofort auf den Fall einer beliebigen Nichtlinearität ausgedehnt werden, wenn a und b als Unbekannte und die Gleichungen (12.10) als zwei weitere Bestimmungsgleichungen gedeutet werden.

Die im letzten Abschnitt betrachtete Methode, $\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ mittels einer noch den Exzeß χ_ε berücksichtigenden äquivalenten Verstärkung zu berechnen, kann ebenfalls durch Übergang zu $(\tilde{\sigma}_\varepsilon, \mu_{\varepsilon_4})$ -abhängigen Koeffizienten a und b auf beliebige Nichtlinearitäten erweitert werden. Man erhält die folgenden funktionalen Abhängigkeiten:

$$\frac{\tilde{\sigma}_\varepsilon^2}{\text{nach Glg: (12.7)}} = \text{fktn}(\underset{\substack{\uparrow \\ (12.1)}}{K}) = \text{fktn}(\underset{\substack{\uparrow \\ (12.1)}}{a, b}, \tilde{\sigma}_\varepsilon, \mu_{\varepsilon_4}) = \frac{\underset{\substack{\uparrow \\ (12.10)}}{f_1(\tilde{\sigma}_\varepsilon^2, \mu_{\varepsilon_4})}} \quad (12.11a)$$

und

$$\frac{\mu_{\varepsilon_4}}{\text{nach Glg: (12.3)}} = \text{fktn}(\underset{\substack{\uparrow \\ (12.4)}}{\tilde{\sigma}_\varepsilon, b}, \tilde{\sigma}_\varepsilon) = \text{fktn}(\underset{\substack{\uparrow \\ (12.4)}}{a, b}, \tilde{\sigma}_\varepsilon) = \frac{\underset{\substack{\uparrow \\ (12.10)}}{f_2(\tilde{\sigma}_\varepsilon^2, \mu_{\varepsilon_4})}} \quad (12.11b)$$

Die zahlreichen Formeln können somit durch Elimination der Zwischengrößen K, a, b und $\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ auf zwei nichtlineare Gleichungen für $\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ und μ_{ε_4} reduziert werden. Die numerische Auswertung dieses Gleichungssystems erfolgt auf iterativem Wege. Ausgehend von zwei Startwerten $\tilde{\sigma}_\varepsilon^{2(0)}$ und $\mu_{\varepsilon_4}^{(0)}$ werden fortlaufend neue Wertepaare nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\varepsilon^{2(k)} &= f_1[\tilde{\sigma}_\varepsilon^{2(k-1)}, \mu_{\varepsilon_4}^{(k-1)}] \\ \mu_{\varepsilon_4}^{(k)} &= f_2[\tilde{\sigma}_\varepsilon^{2(k-1)}, \mu_{\varepsilon_4}^{(k-1)}] \end{aligned}$$

bestimmt. Dies erfolgt so lange, bis aufeinander folgende Wertepaare genügend übereinstimmen. Das so erhaltene Paar $\tilde{\sigma}_\varepsilon^{2(n)}, \mu_{\varepsilon_4}^{(n)}$ löst dann das Gleichungssystem (12.11) im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit. Dabei wird vorausgesetzt, daß das Iterationsverfahren konvergiert. Allgemeine diesbezügliche Aussagen sind wegen des stark nichtlinearen Charakters der Systemgleichungen nur mit sehr großem formalem Aufwand möglich. Untersuchungen in dieser Richtung sind nicht durchgeführt worden. Bei konkreten Beispielen hat sich aber gezeigt, daß das Verfahren sehr schnell konvergiert und diese Konvergenz praktisch unabhängig von der Wahl der Startwerte ist.

Eine Verbesserung des Iterationsverfahrens, die sich vor allem in einer Konvergenzbeschleunigung bemerkbar macht, folgt aus der Feststellung, daß bei der Berechnung von $\mu_{\varepsilon_4}^{(k)}$ bereits der zuvor bestimmte neue Wert $\tilde{\sigma}_\varepsilon^{2(k)}$

zur Verfügung steht. Das Iterationsverfahren lautet dann

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\tilde{\epsilon}}^{2(k)} &= f_1 \left[\tilde{\sigma}_{\tilde{\epsilon}}^{2(k-1)}, \mu_{\tilde{\epsilon}_4}^{(k-1)} \right] \\ \mu_{\tilde{\epsilon}_4}^{(k)} &= f_2 \left[\tilde{\sigma}_{\tilde{\epsilon}}^{2(k)}, \mu_{\tilde{\epsilon}_4}^{(k-1)} \right]\end{aligned}\tag{12.12}$$

Bei der Erstellung eines Digitalprogrammes ist es zweckmäßig, die Zwischengrößen a, b, K, σ_w^2 ebenfalls zu berücksichtigen. Die Tabelle 12.1 gibt eine Zusammenfassung aller für das Programm notwendigen Formeln. Der Algorithmus selbst ist in Form eines Flußdiagramms in Bild 12.1 dargestellt. Auf Einzelheiten wie die Überprüfung von $\chi_{\tilde{\epsilon}}$ gemäß der Ungleichung (7.12) oder den Abbruch der Iteration bei schlechter oder nicht vorhandener Konvergenz ist verzichtet worden, um die Übersichtlichkeit nicht zu erschweren.

①	$\gamma_{\hat{\epsilon}} = \mu_{\hat{\epsilon}_4} / \sigma_{\hat{\epsilon}}^4 - 3$	(2.33)
②	$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{H_k(u/\sigma_{\hat{\epsilon}})}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{\epsilon}}} e^{-u^2/2\sigma_{\hat{\epsilon}}^2} du$	(5.17)
	$W = \sqrt{6 + 9\gamma_{\hat{\epsilon}} - \gamma_{\hat{\epsilon}}^2}$	
③	$\tilde{a}_1 = c_1 + \gamma_{\hat{\epsilon}} [c_3/\sqrt{3!} + 5c_5/\sqrt{5!}]$	(7.13)
	$\tilde{a}_3 = W \frac{c_3}{\sqrt{3!}} + \frac{5\gamma_{\hat{\epsilon}}(12 - \gamma_{\hat{\epsilon}})}{W} \frac{c_5}{\sqrt{5!}} + \frac{210\gamma_{\hat{\epsilon}}}{W} \frac{c_7}{\sqrt{7!}}$	(7.14)
④	$a = \frac{1}{\sigma_{\hat{\epsilon}}} [\tilde{a}_1 - \frac{\gamma_{\hat{\epsilon}} + 3}{W} \tilde{a}_3]$	(12.10)
	$b = \frac{1}{\sigma_{\hat{\epsilon}}^3} \frac{\tilde{a}_3}{W}$	
⑤	$K = a + b \frac{\mu_{\hat{\epsilon}_4}}{\sigma_{\hat{\epsilon}}^2}$	(12.1)
⑥	$\phi_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{ww}(\omega)}{ 1 + KF(j\omega) ^2} e^{j\omega\tau} d\omega$	(12.6)
	$\sigma_{\hat{\epsilon}}^2 = \phi_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(0)$	(12.7)
⑦	$\sigma_{\tilde{w}}^2 = \int_0^{\infty} \frac{S_{ww}(\omega)}{ 1 + aF(j\omega) ^2} d\omega$	(12.4)
⑧	$\mu_{\hat{\epsilon}_4} = 3[\sigma_{\tilde{w}}^2 - 2\sigma_{\hat{\epsilon}}^2]^2 - 12\sigma_{\hat{\epsilon}}^6 b \int_0^{\infty} \tilde{g}(u) \cdot [3\rho_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(u) - 2\rho_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}^3(u)] du$	(12.3)

Tabelle 12.1

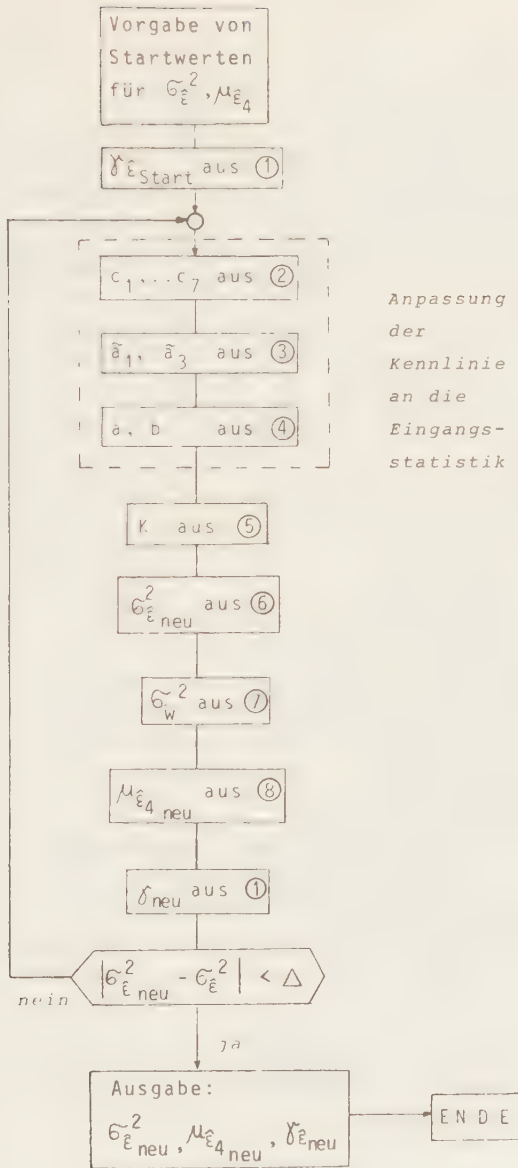


Bild 12.1

12.3 EIN BEISPIEL

Die quantitative Überprüfung des vorgeschlagenen Näherungsverfahrens erfolgt zweckmäßigerweise an einem Beispiel, das auch mit der "exakten" FOKKER-PLANCK-Methode behandelt werden kann. Das bedeutet zwar aus den in Kapitel 9.4 erläuterten Gründen eine Einschränkung auf sehr einfache Regelkreise, bietet dafür aber den Vorteil einer verlässlichen Aussage über den Fehler.

Als Beispiel soll daher der in Abschnitt 9.3 behandelte Regelkreis die-

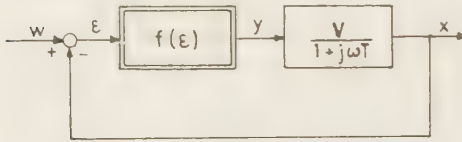


Bild 12.2

nen, bei dem Linearteil und Führungsformfilter durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung mit der Zeitkonstanten T gegeben sind. Die Nichtlinearität sei ein Begrenzer mit $h=d=\sqrt{2}$. Ausgehend von

$$F(j\omega) = \frac{V}{1+j\omega T}$$

folgt zunächst

$$\tilde{F}(j\omega) = \frac{V}{(1+aV)+j\omega T}$$

und daraus als Fourierinverse die zugehörige Gewichtsfunktion zu

$$\tilde{g}(t) = \frac{V}{T} e^{-t \frac{1+aV}{T}} \cdot 1(t).$$

Mit dem Leistungsdichtespektrum des Führungsgeräusches

$$S_{ww}(\omega) = \frac{S_o}{1+\omega^2 T^2}$$

und der zugehörigen Varianz

$$\sigma_w^2 = \frac{\pi S_o}{2T}$$

erhält man über

$$S_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\omega) = \frac{S_{ww}(\omega)}{|1+K F(j\omega)|^2} = \frac{S_o}{|1+KV+j\omega T|^2}$$

die Autokorrelationsfunktion $\phi_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\tau)$ zu

$$\phi_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}(\tau) = \frac{\sigma_w^2}{1+KV} e^{-|\tau| \frac{(1+KV)}{T}},$$

woraus

$$\tilde{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{\tilde{\sigma}_w^2}{1 + KV} - |z| \frac{1+KV}{T}$$

und

$$\varrho_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = e$$

entnommen werden können. Damit können die für μ_{ε_4} erforderlichen Integrale wie folgt angegeben werden:

$$\int_0^{\infty} \tilde{g}(u) \varrho_{\varepsilon\varepsilon}(u) du = \frac{V}{2 + V(a+k)}$$

$$\int_0^{\infty} \tilde{g}(u) \varrho_{\varepsilon\varepsilon}^3(u) du = \frac{V}{4 + V(a+3K)} .$$

Mit

$$\tilde{\sigma}_w^2 = \frac{\tilde{\sigma}_w^2}{1+aV}$$

lautet die Glg.(12.6) für μ_{ε_4} dann:

$$\mu_{\varepsilon_4} = 3 (\tilde{\sigma}_w^2 - 2 \tilde{\sigma}_{\varepsilon}^2)^2 + 12 b V \tilde{\sigma}_{\varepsilon}^6 \left[\frac{3}{2+V(a+K)} - \frac{2}{4+V(a+3K)} \right] .$$

Entnimmt man schließlich noch die den Begrenzer kennzeichnenden Koeffizienten $c_1, \dots, c_7$ dem Kapitel 6, so sind alle erforderlichen Zusammenhänge bekannt und es kann die genäherte Bestimmung von $\tilde{\sigma}_{\varepsilon}^2$ nach dem im letzten Abschnitt angegebenen Algorithmus erfolgen. In den Formeln sind außer den für das Iterationsverfahren notwendigen Größen noch $\tilde{\sigma}_w^2$ und V als beliebig wählbare Parameter enthalten. Die Verzögerungszeit T tritt nur implizit durch $\tilde{\sigma}_w^2$ auf, was durch die Übereinstimmung von Führungsfilter und linearem Systemabschnitt bewirkt wird. Bei dem Beispiel können daher Effekte, die sich bei unterschiedlichen Bandbreiten des Eingangssignals und des linearen Regelkreisabschnittes ergeben, nicht untersucht werden. Hauptziel ist hier aber nur die Überprüfung der Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Näherungsverfahrens unter Bezugnahme auf die exakten Werte. Eine Erweiterung des Verfahrens auf den Fall unterschiedlicher Bandbreiten bringt keine Schwierigkeiten. Jedoch ist eine Lösung der FOKKER-PLANCK-Gleichung für diesen Fall nicht mehr auf einfache Weise möglich.

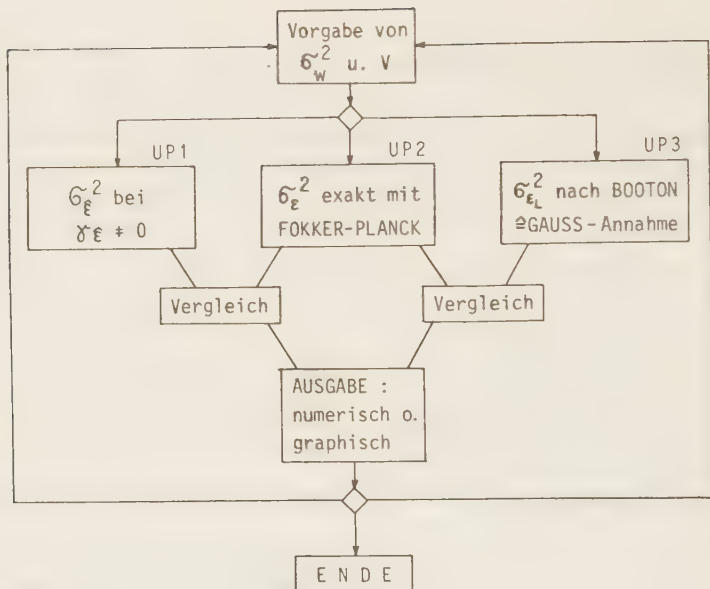


Bild 12.3

Bild 12.3 zeigt den schematischen Aufbau eines für dieses Beispiel erstellten erweiterten Programms, das zusätzlich auch einen Vergleich mit den exakten Werten sowie den quasilinearen Näherungswerten nach BOOTON gestattet. Als Ergebnisse dieses Vergleiches sind in Bild 12.4 die relativen Fehler

$$\Delta_1 := \Delta(\sigma_{\epsilon_L}^2) = \frac{\sigma_{\epsilon}^2 - \sigma_{\epsilon_L}^2}{\sigma_{\epsilon}^2} \quad (\text{Bild 12.4a})$$

$$\Delta_2 := \Delta(\sigma_{\epsilon}^2) = \frac{\sigma_{\epsilon}^2 - \sigma_{\epsilon_L}^2}{\sigma_{\epsilon}^2} \quad (\text{Bild 12.4b})$$

in Abhängigkeit von der Verstärkung V für verschiedene Leistungspegel σ_w^2 dargestellt.

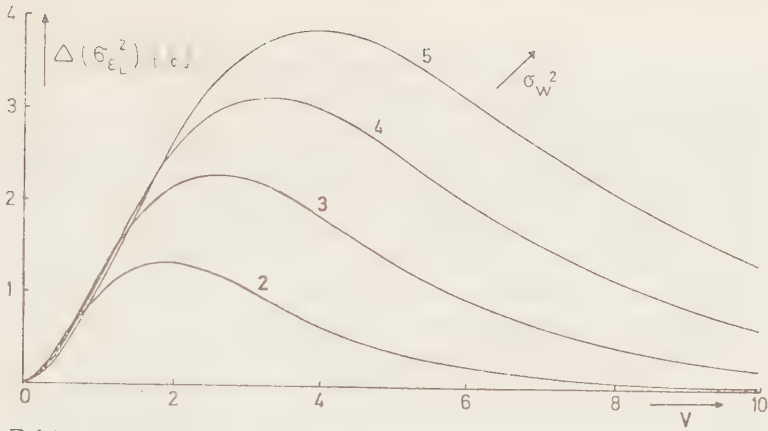


Bild 12.4a

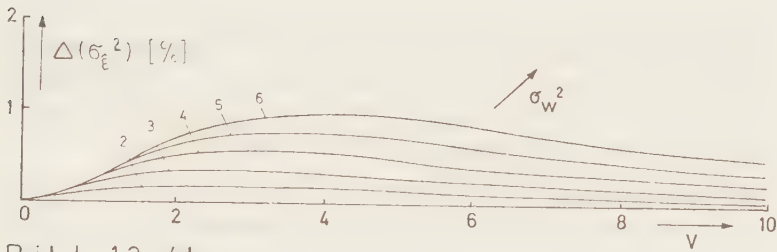


Bild 12.4b

Zunächst kann festgestellt werden, daß die auf der GAUSSschen Annahme beruhenden Näherungswerte $\tilde{\sigma}_{\epsilon_L}^2$ bereits verhältnismäßig genau sind. Für $\tilde{\sigma}_w^2=5$ bleibt der maximale Fehler unter 4%. Die Abweichung der Dichte $p_{\epsilon}(u)$ im nichtlinearen Regelkreis von der GAUSSschen Dichte ist folglich nur gering (vergl. Bild 9.4), so daß einmal die den Exzeß berücksichtigende GRAM-CHARLIER-Näherung eine gute Approximation liefern und zum anderen die für das um $\hat{\gamma}_{\epsilon}$ erweiterte Verfahren erforderliche Annahme " $b \ll 1$ " erfüllt sein wird. In der Tat führt das vorgeschlagene erweiterte Verfahren zu einem wesentlich kleineren Fehler (Bild 12.4b). Die durch das verbesserte Verfahren erreichte Genauigkeitssteigerung ist bezogen auf die BOOTONschen Näherungswerte um so größer, je größer die Abweichung

zwischen diesen und den exakten Werten ist. Das ist bei zunehmender Leistung des Eingangsprozesses der Fall.

Wird der Begrenzer durch einen Zweipunktschalter ersetzt, so ist die Genauigkeitssteigerung etwas geringer, liegt aber immer noch bei etwa 60%. Die folgenden Zahlenwerte mögen zur Verdeutlichung dienen.

	$\tilde{\sigma}_E^2$	$\tilde{\sigma}_{\hat{E}}^2$	$\tilde{\sigma}_{E_L}^2$	Δ_2	Δ_1	$\delta = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1}$
$V = 1$ $\tilde{\sigma}_w^2 = 1$	0.4749	0.4687	0.4593	1.30 %	3.28 %	60.6 %
$\frac{2}{1}$	0.2536	0.2449	0.2318	3.40 %	8.59 %	60.5 %
$\frac{2}{2}$	0.7221	0.7063	0.6821	2.17 %	5.54 %	60.8 %

Bei allen Berechnungen hat sich das Iterationsverfahren als rasch konvergierend erwiesen. Für eine Genauigkeit von 10^{-6} waren durchschnittlich sechs Iterationschritte notwendig. Eine Abhängigkeit von den Anfangswerten konnte in keinem Fall festgestellt werden. Jedoch dürfen diese Aussagen nicht als allgemeingültig verstanden werden.

Ausgehend von der verbesserten Varianz $\tilde{\sigma}_E^2$ und dem zugehörigen Exzeß γ_E kann die Dichte $p_E(u)$ durch $\tilde{p}_4(u)$ genähert angegeben werden. Ferner können mit der für $\tilde{\sigma}_E^2$ berechneten äquivalenten Verstärkung verbesserte Schätzwerte für die Korrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum des Folgefehlers bestimmt werden.

12.4 GEGENÜBERSTELLUNG DER VERSCHIEDENEN METHODEN

Die in dieser Arbeit für den nichtlinearen Regelkreis behandelten Methoden sind in Bild 12.5 in Form einer räumlichen Darstellung einander gegenübergestellt. Die wesentlichen Charakterisierungen der einzelnen Verfahren, nämlich die Art des zugrunde gelegten Kreises (linearer oder nichtlinearer Ersatzkreis) sowie die Art der eindimensionalen Dichte (GAUSS, GRAM-CHARLIER-Näherung mit χ_e , exakte Dichte) sind an den Achsen der Grundebene angetragen. Die jeweiligen Verfahren ergeben sich dann als Senkrechte in den zugehörigen "Charakterisierungspunkten". Die Höhe und Richtung gibt dabei ein Maß für die Güte der Näherungen von σ_e^2 , wobei als Bezugspunkte die exakte Varianz und der BOOTONsche Näherungswert gelten.

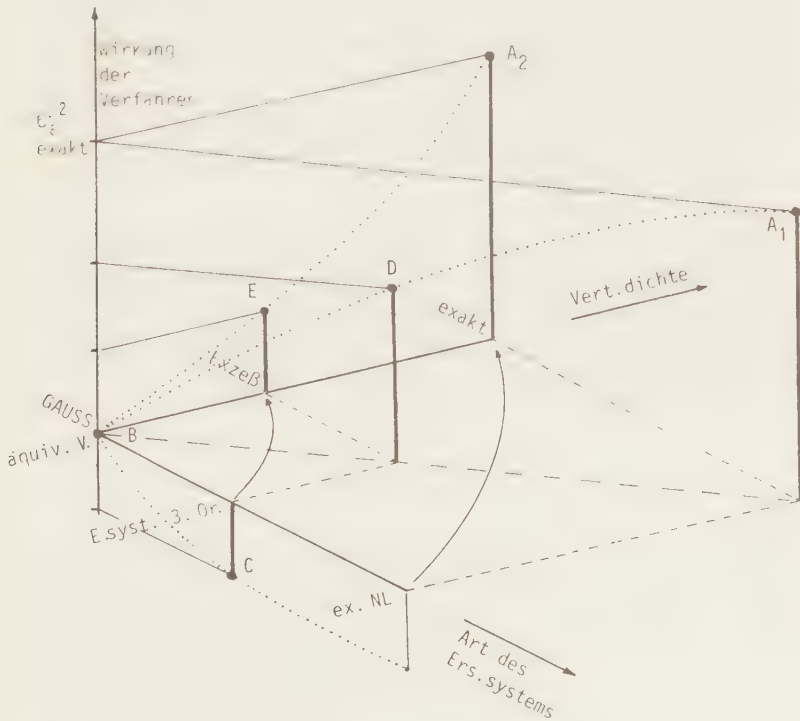


Bild 12.5

Dabei bedeutet im einzelnen

- A₁: FOKKER-PLANCK-Methode → die Varianz des Folgefehlers wird exakt bestimmt (Kap. 8)
- A₂: linearer Ersatzkreis: die äquivalente Verstärkung wird mit der exakten Dichte bestimmt → $\tilde{\sigma}_e^2 = \sigma_e^2$ (Abschn. 9.4)
- B: linearer Ersatzkreis: die äquivalente Verstärkung wird mit der GAUSS-Verteilung bestimmt → statistische Linearisierung des Regelkreises nach BOOTON
- C: nichtlinearer Ersatzkreis, bei dem das Ersatzsystem der GAUSS-Verteilung angepaßt wird; stimmt mit sog. "funktionalanalytischen Methoden" überein → immer schlechter als der BOOTON'sche Näherungswert (Abschn. 10.2)
- D: Kreis mit nichtlinearem Ersatzsystem dritter Ordnung → Integralgleichungssystem liefert Näherungen für alle Momentfunktionen zweiter und vierter Ordnung (Kap. 11)
- E: Auswertung der äquivalenten Verstärkung für einen nichtlinearen Ersatzkreis bei Berücksichtigung von γ_e → Gleichungssystem für $\tilde{\sigma}_e$ und γ_e (Kap. 12)

Die Näherungsverfahren E und D erfordern die Kenntnis der vierdimensionalen Autokorrelation. Sie sind folglich keineswegs auf GAUSSverteilte Eingangssignale beschränkt. Insbesondere das Verfahren E scheint daher auch für die genäherte Bestimmung der Gesamtleistung des Folgefehlers bei sinusförmigem Eingangssignal des Kreises geeignet zu sein.

Zusammenfassung

Zahlreiche in der Regelungstechnik vorkommende Nichtlinearitäten können durch eine eindeutige statische Kennlinie gekennzeichnet werden. Im Fall stochastischer Eingangsgeräusche erfolgt die mathematische Beschreibung derartiger Nichtlinearitäten zumeist quasilinear durch die äquivalente Verstärkung.

In der vorliegenden Arbeit wird eine verbesserte Beschreibung durch nicht-lineare, der Amplitudenverteilung des Eingangssignals angepaßte Ersatzsysteme vorgeschlagen und untersucht. Der Entwurf erfolgt dabei unter dem Gesichtspunkt der Approximation von Zufallsvariablen, was infolge des statischen Charakters der zugrunde gelegten Nichtlinearität möglich ist:

Für eine Zufallsvariable y , die von einer Zufallsvariablen x statistisch abhängt, wird bezüglich des mittleren quadratischen Fehlerkriteriums der optimale Schätzwert durch den bedingten linearen Mittelwert $\hat{y} = \mathcal{E}\{y|x\}$ geliefert. Mit Hilfe einer Reihenentwicklung der Verbundverteilungsdichte $p_{xy}(u,v)$ wird für $\hat{y}$ eine Reihenentwicklung hergeleitet, deren Partialsummen Näherungen für $\hat{y}$ liefern. Über das Orthogonalitätsprinzip wird gezeigt, daß diese Näherungen optimale Approximationen im Sinn des QMW-Kriteriums sowohl für y wie auch für $\hat{y}$ darstellen, wenn nur die Menge der zugelassenen Approximationsfunktionen entsprechend gewählt wird. Die gewonnenen Ergebnisse werden auf den Fall einer durch $y=f(x)$ beschriebenen Nichtlinearität angewendet, indem der funktionale Zusammenhang zwischen y und x als Grenzfall der statistischen Abhängigkeit behandelt wird. Man erhält so für das nichtlineare Ersatzsystem n -ter Ordnung eine Summendarstellung der Form

$$\hat{y}_n = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x).$$

Die Entwicklungsfunktionen $\varphi_k(x)$ sind dabei Orthogonalpolynome bezüglich der Verteilungsdichtefunktion des Eingangssignals der Nichtlinearität. Die Koeffizienten a_k ergeben sich zu $a_k = \mathcal{E}\{f(x) \varphi_k(x)\}$, sie bewirken die Anpassung des Ersatzsystems an die Nichtlinearität. Die Struktur des Ersatzsystems wird durch die Orthogonalpolynome und somit durch statistische Eigenschaften des Eingangssignals festgelegt. Es wird ge-

zeigt, daß die Konstruktion der Orthogonalpolynome bereits aus den Nullmomenten der Eingangsverteilung erfolgen kann; allgemeine Konstruktionsverfahren werden hergeleitet.

Für $n=1$ ergibt sich als Spezialfall die von KAZAKOV angegebene Erweiterung des BOOTONSchen quasilinearen Ersatzsystems. Insbesondere folgt für mittelwertfreie Eingangssignale die BOOTONSche äquivalente Verstärkung zu $K = \sigma_x^{-1} a_1$.

Ausführliche quantitative Untersuchungen des Approximationsverhaltens für den Fall eines GAUSSschen Eingangsgerausches zeigen eine wesentliche Fehlerverringerung bereits dann, wenn anstelle des quasilinearen ein Ersatzsystem zweiter oder dritter Ordnung benutzt wird. Für die Koeffizienten a_k werden stark vereinfachende Berechnungsvorschriften angegeben, die sich die Eigenschaften der durch die HERMITESchen Polynome gegebenen Entwicklungsfunktionen zunutze machen. Die Bedeutung der GAUSSschen Entwicklungskoeffizienten wird dadurch verstärkt, daß sie auch zur Bestimmung von Ersatzsystemen bei nicht-GAUSSschen Eingangsverteilungen benutzt werden, indem anstelle der exakten Verteilungsdichte eine GRAM-CHARLIER-Näherung zugrunde gelegt wird.

Die Berechnung der Autokorrelationsfunktion $\phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}(\tau)$ und der Kreuzkorrelationsfunktion $\phi_{\hat{x} \hat{y}_n}(\tau)$ erfolgt mit Hilfe $\phi_{\hat{y}_n \hat{y}_n}$ von zweidimensionalen Reihenentwicklungen der n Verbundverteilungsdichte $p_{x(t)x(t+\tau)}(u,v)$. Es wird gezeigt, daß die Autokorrelationsfunktion am Ausgang des Ersatzsystems n -ter Ordnung übereinstimmt mit den ersten n^2 Gliedern einer Reihenentwicklung der Autokorrelierten des Ausgangssignals der Nichtlinearität. Entsprechendes gilt für die Ein- Ausgangs- Kreuzkorrelationsfunktionen von Ersatzsystem und Nichtlinearität, sofern die zweidimensionale Dichte des Eingangssignals genügend allgemein ist. Besitzt diese dagegen eine Reihenentwicklung in "Diagonalform", wie es bei GAUSS-Verteilungen der Fall ist, so stimmen $\phi_{\hat{x} \hat{y}_n}(\tau)$ und $\phi_{\hat{x} \hat{y}_n}(\tau)$ sogar überein und sind bis auf eine additive Konstante proportional zur Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals. Aus der Übereinstimmung der Kreuzkorrelierten folgt noch die für das quasilineare Ersatzsystem und GAUSSverteilten Eingangsprozeß bereits bekannte Orthogonalität zwischen dem Eingangsprozeß und dem minimalen Fehlerprozeß. Zwei Erweiterungen dieser

Aussage werden behandelt. Untersuchungen über die Auswirkung einer linearen Filterung der Ausgangssignale von Nichtlinearität und nichtlinearem Ersatzsystem sowie den Einfluß einer Filterung auf den Approximationsfehler schließen den ersten Hauptteil der Arbeit ab.

Der verbleibende Teil der Arbeit befaßt sich mit der Berechnung von statistischen Kenngrößen des nichtlinearen Regelkreises. Als geschlossenes Verfahren zur Bestimmung von Verteilungsdichtefunktionen ist hier die FOKKER-PLANCK-Methode bekannt. Es wird ihre Anwendung auf den einläufigen Regelkreis beschrieben. Ihre durch sehr einschneidende Voraussetzungen und mathematische Schwierigkeiten bei der Lösung einer partiellen Differentialgleichung gegebenen Grenzen werden aufgezeigt.

Die Überlegungen zu einer genäherten Behandlung des nichtlinearen Kreises werden zunächst für eine Nichtlinearität mit einer kubischen Kennlinie durchgeführt. Dadurch können Gleichungen angegeben werden, die neben den Kenngrößen des Regelkreises nur noch Momentfunktionen unterschiedlicher Ordnung des Eingangsprozesses $\varepsilon(t)$ der Nichtlinearität enthalten. Typisch für das nichtlineare Problem ist dabei, daß neben der Erhöhung der Ordnung auch eine Erhöhung der Dimension der statistischen Kennfunktionen erfolgt. Man erhält so ein Gleichungssystem unendlicher hoher Ordnung für alle Momentfunktionen von $\varepsilon(t)$. Für GAUSSähnliche Prozesse wird dieses System auf ein Integralgleichungssystem zur Bestimmung aller Korrelationsfunktionen zweiter und vierter Ordnung reduziert.

Aus den gewonnenen Ergebnissen wird eine vereinfachte Methode in Form eines quasilinearen Verfahrens abgeleitet, bei dem in Erweiterung der üblichen linearisierten Behandlung nichtlinearer Regelkreise nach BOOTON auch der nicht-GAUSSsche Charakter der Verteilungsdichte berücksichtigt wird. Die Erweiterung auf einen beliebigen nichtlinearen Regelkreis erfolgt mit Hilfe eines für die Nichtlinearität erstellten Ersatzsystems dritter Ordnung, das die Varianz und den Exzeß der Eingangsverteilung berücksichtigt. Die Wirksamkeit des Verfahrens wird an einem Beispiel nachgewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 KAZAKOV, I.E.: "Approximate Probability Analysis of the Operational Precision of Essentially Non-Linear Feedback Control System"; Automation and Remote Control, vol 17, 1956, S. 423-450

- 2 SAWARAGI, Y. & TAKAHASHI, S.: "Response of Control Systems Containing Zeromemory Non-linearity to Sinusoidal and GAUSSian Inputs"; Proc. Heidelberg Conf. Aut. Cont. 1956, S. 193-203

- 3 SOMERVILLE, M.J. & ATHERTON, D.P.: "Multi-gain Representation for a Single-valued Nonlinearity with Several Inputs and the Evaluation of Their Equivalent Gains by a Cursor Method"; Proc. IEE, vol C-105 (1958), S. 537-549

- 4 DITTRICH, F.: "Zur statistischen Linearisierung einer Klasse von Nicht-linearitäten mit mehrdeutigen Kennlinien"; Dissertation Universität Erlangen-Nürnberg 1975

- 5 JAZWINSKI, A.H.: "Stochastic Prozesses and Filtering Theory"; Academic Press, New York 1970

- 6 GIKHMAN, I.I. & SKOROKHOD, A.V.: "Introduction to the Theory of Random Processes"; Saunders Company, London 1963

- 7 PAPOULIS, A.: "Probability, Random Variables and Stochastic Processes"; Mc Graw-Hill Book Comp., New York 1965

- 8 CRAMER, H.: "Mathematical Methods of Statistics"; Princeton University Press 1946

- 9 SCHWARZE, H.: "Ein Beitrag zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte-Verteilungsfunktion stochastischer Prozesse mit Hilfe der Quasimomente"; Dissertation, TH Hannover 1969

- 10 GILLES, E.D. & KNÜPP, U.: "Die Dynamik von Rührkesselreaktoren bei Polymerisationsreaktionen"; Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung 6, 1967, S. 262-269

- 11 BARRET, J.F. & LAMPARD, D.G.: "An Expansion for Some Second-Order Probability Distributions and its Application to Noise Problems"; IRE Transactions on IT 10, 1955, S. 10-15

- 12 COURANT, R. & HILBERT, D.: "Methods of Mathematical Physics Bd I"; Interscience Publishers, N.Y. 1953

- 13 TRICOMI, F.: "Vorlesungen über Orthogonalreihen"; Springer-Verlag, Berlin 1955
- 14 SCHNEEWEIS, W.: "Zufallsprozesse in dynamischen Systemen"; Springer-Verlag, Berlin 1974
- 15 KUSNETZOV, P.I./STATONOVICH, R.L./TIKHONOV, V.I.: "Non-linear Transformations of Stochastic Processes"; Pergamon Press, Oxford 1965
- 16 LUBBOCK, J.K.: "Optimization of a Class of Non-linear Systems"; Proc. 1st Int. Congr. IFAC (Moskau); Butterworth, London 1961, S.761-769
- 17 SAUER, R. & SZABO, I.: "Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Bd 3"; Springer-Verlag, Berlin 1967
- 18 PUGACHEV, V.S.: "Theory of Random Functions and its Application to Control Problems"; Pergamon Press, Oxford 1965
- 19 DEUTSCH, R.: "Estimation Theory"; Prentice-Hall, N.Y. 1965
- 20 MEINARDUS, G.: "Approximation of Functions"; Springer-Verlag, Berlin 1967
- 21 MERCHAV, S.J.: "Equivalent Gain of Single-valued Nonlinearities with Multiple Inputs"; IRE Trans. AC, vol 7, 1962, S. 122-124
- 22 GELB, A. & VANDER VELDE, W.E.: "Multiple-Input Describing Functions and Non-linear System Design"; Mc Graw-Hill Book Comp., New York 1968
- 23 PERVOZVANSKII, A.A.: "Random Processes in Nonlinear Control Systems"; Academic Press, New York 1965
- 24 PUPKOV, K.A.: "Method of Investigating the Accuracy of Essentially Non-linear Automatic Control Systems by Means of Equivalent Transfer Functions"; Aut. and Remote Contr., vol 21 (1960), S. 126-140
- 25 SCHLITT, H.: "Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen"; Vieweg Verlag, Braunschweig 1968
- 26 SCHLITT, H.: "Systemtheorie für regellose Vorgänge"; Springer-Verlag, Berlin 1960
- 27 HASTINGS, C.: "Approximation for Digital Computers"; Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1970
- 28 BARRETT, J.F., COALES, J.F.: "An Introduction to the Analysis of Non-Linear Control Systems with Random Inputs"; Proc. IEE, Part C, Monograph No 154M (1955), S. 190-199

- 29 BROWN, J.L.: "On a Crosscorrelation Property for Stationary Random Processes"; Trans. IRE, vol. PGIT-3, Nr. 1, 1957, S. 28-31
- 30 NUTTAL, A.H.: "Theory and Application of the Separable Class of Random Processes"; Technical Report 343, Mass. Inst. of Technology, 1958
- 31 MOHAN, A.M., KRISHNA, G.: "On some Aspects of Statistical Linearization of Non-linear Elements"; Int. J. Control, Vol 3, 1966, S. 541-551
- 32 BENDAT, J.S. & PIERSON, A.G.: "Random Data"; Wiley Inc., New York 1971
- 33 ÅSTRÖM, K.J.: "Introduction to Stochastic Control Theory"; Acad. Press, New York 1970
- 34 BHARUCHA-REID, A.T.: "Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications"; Mc Graw-Hill-Inc; New York 1960
- 35 BARRETT, J.F.: "Application of Kolmogorov's Equation to Randomly Disturbed Automatic Control Systems"; Proc. 1st Int. Congr. IFAC, (Moskau); Butterworth, London 1961, S. 724-730
- 36 WONG, E.: "Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems"; Mac Graw-Hill, New York 1971
- 37 FULLER, A.T.: "Nonlinear Stochastic Control Systems"; Taylor & Francis Ltd, London 1968
- 38 SAWARAGI, Y., SUGAI, N., SUNAHARA, Y.: "Statistical Studies on Nonlinear Control Systems"; Nippon Printing and Publishing, Osaka 1962
- 39 KHAZEN, E.M.: "Diskussionsbeitrag zu 35 "; Proc. 1st Int. Congr. IFAC, Butterworth, London 1961, S. 730-732
- 40 ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.: "Handbook of Mathematical Functions"; Dover Publications, New York 1970
- 41 SMITH, H.W.: "Approximate Analysis of Randomly Excited Nonlinear Controls"; Research Monograph No 34, M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1966
- 42 PYATNITSKII, G.I.: "The Effekt of Stationary Random Processes on Automatic Control Systems Containing Essentially Nonlinear Elements"; Autom. and Remote Control 21, no 4, 1960, S. 541-551
- 43 STRATONOWICH, R.L.: "Topics in the Theory of Random Noise"; vol I; Gordon and Breach, New York 1963
- 44 KORN, N.: "Ein Beitrag zur Behandlung von Regelkreisen mit stochastischen Eingangssignalen beliebiger Verteilung"; Dissertation TH Hannover, 1966

Lebenslauf

Persönliches

Hartmut Johné, geboren am 30.08.1945 in Waldenburg/Schlesien.

Eltern: Kurt Johné, Büroangestellter,

Margarete Johné, geb. Peukert.

Von 1966 an verheiratet mit Ingeborg Gerstner, 2 Töchter.

Schulbildung

1952-1956 Volksschule in Timmern/Kreis Wolfenbüttel,

1956 Oberschule für Jungen in Wolfenbüttel,

1957-1965 Gymnasium Salzgitter-Bad,

Februar 1965 Reifeprüfung.

Studium

SS 1965 - WS 67/68 TH Clausthal: Mathematik und Physik,

SS 1968 - WS 70/71 Universität Erlangen-Nürnberg,
Diplomarbeit am Institut für Angewandte
Mathematik aus dem Gebiet der Approxima-
tionstheorie,

November 1970 Diplom-Hauptprüfung für Mathematik.

Wissenschaftliche Tätigkeit

Seit 1.12.1970 Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissen-
schaftlichen Assistenten sowie wissenschaftliche Hilfskraft
am Institut für Regelungstechnik der Universität Erlangen-
Nürnberg.

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197